

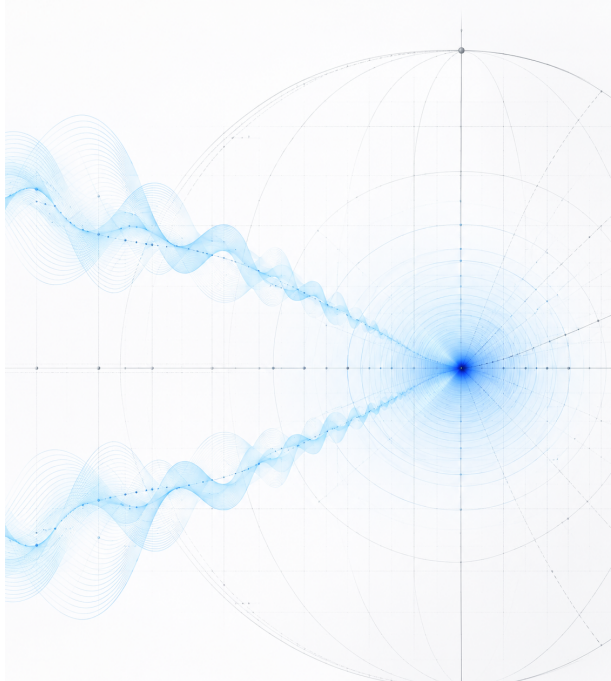
LEZIONE 02/30

Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Vettori complessi e matrici

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari Ultimo

aggiornamento: 24 Settembre 2026



Uno stato richiede più di un singolo numero

SCALARE COMPLESSO

$$z \in \mathbb{C}$$

Descrive una singola quantità mediante modulo e fase.

VETTORE COMPLESSO

$$x \in \mathbb{C}^n$$

Organizza n componenti complesse in un unico oggetto matematico.

Un vettore si esprime in coordinate, ma il loro significato/valore dipende dalla base scelta.

Tre obiettivi per la lezione

01 Rappresentare

vettori, righe, matrici e coordinate

02 Calcolare

operazioni matriciali, prodotti interni, norme e normalizzazioni

03 Controllare

dimensioni, ordine dei fattori, coniugazione, ortogonalità e completezza di una base

$\mathbb{C}^n$ è chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare

VETTORI

$$x, y \in \mathbb{C}^n$$

Ogni vettore possiede n componenti complesse ordinate.

CHIUSURA

$$\alpha x + \beta y \in \mathbb{C}^n$$

α e β sono scalari complessi; il risultato resta nello stesso spazio.

Lo spazio vettoriale è l'insieme dei vettori insieme alle operazioni che li combinano.

Un vettore colonna ordina n componenti complesse

COMPONENTI

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

FORMA

$$n \times 1$$

CAMPO

$$x_j \in \mathbb{C}$$

L'indice j identifica la posizione della componente, non una potenza né un'etichetta arbitraria.

Tre controlli precedono qualunque operazione

01 Dimensione

contare le componenti e verificare che i vettori appartengano allo stesso spazio

02 Campo

ricordare che i coefficienti possono essere complessi e devono essere coniugati quando richiesto

03 Base

specificare rispetto a quali vettori sono state scritte le coordinate

Esempio n.1

ESEMPIO GUIDATO

$$u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$u_1 = 1 + i, \quad u_2 = 2, \\ u_3 = -i.$$

Forma della colonna: 3×1

Quali componenti cambiano moltiplicando u per i ?

Somma e moltiplicazione per uno scalare

DATI

$$x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Le dimensioni devono coincidere.

$$\alpha x + \beta y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}$$

Ogni posizione combina soltanto componenti con lo stesso indice.

CHIUSURA

$$\alpha x + \beta y \in \mathbb{C}^n$$

Righe, identità e operazioni elementari su matrici

FORME

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$c : m \times 1$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

$$r : 1 \times n$$

IDENTITÀ

$$I_m A = A, \quad A I_n = A$$

SOMMA

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

SCALARE

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Il prodotto AB (riga x colonna)

COMPATIBILITÀ

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times p}$$

$$(m \times n)(n \times p) \longrightarrow m \times p$$

Le dimensioni interne devono coincidere.

REGOLA RIGA-PER-COLONNA

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

L'elemento (i, j) usa la riga i di A e la colonna j di B .

Esempio n.2 - riga x colonna

DATI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A : 2 \times 3, \quad B : 3 \times 2$$

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 2 + 2(-1) + (-1)3 = -3,$$

$$(AB)_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1)2 = -1,$$

$$(AB)_{21} = 0 \cdot 2 + 3(-1) + 4 \cdot 3 = 9,$$

$$(AB)_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8.$$

RISULTATO

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Il prodotto matriciale è associativo e distributivo, ma non commutativo

NON COMMUTATIVITÀ

$$AB \neq BA \quad \text{in generale}$$

ASSOCIATIVITÀ

$$A(BC) = (AB)C$$

DISTRIBUTIVITÀ

$$A(B + C) = AB + AC$$

POTENZE

$$A^0 = I, \quad A^{k+1} = A^k A$$

Combinazione lineare di vettori

VETTORI DI PARTENZA

$$u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$$

COMBINAZIONE

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$$

I coefficienti scalari α_j stabiliscono il peso di ciascun vettore.

Una base per $\mathbb{C}^2$

PREREQUISITO DI
ALGEBRA LINEARE

SPAZIO GENERATO

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$x = ae_1 + be_2$$

$$\text{span}\{e_1, e_2\} = \mathbb{C}^2$$

Vettori linearmente indipendenti

EQUAZIONE

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

Cerchiamo le possibili relazioni fra i vettori.

soluzione non banale $\implies$ vettori
dipendenti

Almeno un coefficiente è diverso da
zero.

INDIPENDENTI

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ è l'unica soluzione

Una base genera tutto lo spazio vettoriale

INSIEME ORDINATO

$$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$$

I vettori della base fissano il sistema di coordinate.

base = insieme generatore +
indipendenza lineare

Ogni vettore dello spazio si ottiene in
modo unico.

$$x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$$

La base canonica

BASE CANONICA

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Le coordinate identificano le componenti della colonna.

DIMENSIONE

Una base di $\mathbb{C}^n$ contiene n vettori.

Le coordinate dipendono dalla base

Scegliamo la base

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nelle coordinate canoniche (e_1, e_2) il vettore x è:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che nella nuova base il vettore x è rappresentato da:

$$x = 2b_1 + b_2$$

Ovvero, nella base $\mathcal{B}$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore è lo stesso, ma cambiano le coordinate

Una matrice è una sequenza ordinata di colonne

MATRICE

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

Una matrice possiede m righe e n colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Ogni colonna a_j appartiene a $\mathbb{C}^m$.

DIMENSIONE

m righe $\times$ n colonne

La notazione di Dirac

CORRISPONDENZA DIRAC-MATRICI

Oggetto	Dirac	Coordinate in una base
vettore	$ \psi\rangle$	$x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$
duale	$\langle\psi $	$x^\dagger \in \mathbb{C}^{1 \times n}$
prodotto interno	$\langle\phi \psi\rangle$	$x^\dagger y \in \mathbb{C}$

$$|\psi\rangle \leftrightarrow x, \quad \langle\psi| \leftrightarrow x^\dagger$$

AGGIUNTO O DAGGER

$$x^\dagger = (x^*)^T$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} x_1^* & \cdots & x_n^* \end{pmatrix}$$

Prima coniugare, poi trasporre.

Il prodotto interno trasforma due vettori in uno scalare

DUE VETTORI

$$x, y \in \mathbb{C}^n$$

Devono appartenere allo stesso spazio vettoriale complesso.

UNO SCALARE

$$\langle x, y \rangle = x^\dagger y = \sum_{j=1}^n x_j^* y_j$$

Il primo vettore viene coniugato; il risultato appartiene a $\mathbb{C}$.

La coniugazione

SOLA TRASPOSTA

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x^T x = 1 + i^2 = 0$$

Un vettore non nullo avrebbe
“lunghezza” nulla.

TRASPOSTA CONIUGATA

$$x^\dagger = (1 \quad -i)$$
$$x^\dagger x = 1 + (-i)i = 2$$

Il risultato è reale e positivo.

Esempio di calcolo del prodotto interno complesso

VETTORI

$$x = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

Coniugare x prima di moltiplicare le componenti.

$$x^\dagger y = (1 - i)2 + 2(1 - i) = 4 - 4i$$

Prima coniugare, poi moltiplicare e sommare.

INVERTENDO L'ORDINE

$$y^\dagger x = 4 + 4i = (x^\dagger y)^*$$

Regole del prodotto interno

SECONDO ARGOMENTO

$$x^\dagger(\alpha y + \beta z) = \alpha x^\dagger y + \beta x^\dagger z$$

PRIMO ARGOMENTO

$$(\alpha x + \beta w)^\dagger y = \alpha^* x^\dagger y + \beta^* w^\dagger y$$

ATTENZIONE: gli scalari sono complessi coniugati.

La norma

DEFINIZIONE

$$\|x\| = \sqrt{x^\dagger x}$$

La norma è reale e non negativa.

$$x^\dagger x = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$$

Somma reale e non negativa dei moduli al quadrato.

OMOGENEITÀ

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

Normalizzare in tre passaggi

01 Calcolo

determinare $x^\dagger x$ e porre $\|x\| = \sqrt{x^\dagger x}$

02 Verifica

controllare che $x \neq 0$, perché il vettore zero non è normalizzabile

03 Normalizzazione

definisco $\hat{x} = x/\|x\|$

Esempio di normalizzazione

VETTORE INIZIALE

$$x = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^\dagger x = |1 + i|^2 + |1|^2 = 2 + 1 = 3$$

VETTORE NORMALIZZATO

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}^\dagger \hat{x} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

L'ortogonalità equivale a prodotto interno nullo

ORTOGONALI

$$x^\dagger y = 0$$

I due vettori sono indipendenti se entrambi sono non nulli.

NON ORTOGONALI

$$x^\dagger y \neq 0$$

Il prodotto interno è non nullo: i vettori non sono ortogonali.

Esempio di ortogonalità

COPPIA

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$$

$$u^\dagger v = 1 + (-i)(-i) = 0$$

Essendo $u^\dagger = (1, -i)$

NORMALIZZATI

$$\hat{u} = u/\sqrt{2}, \quad \hat{v} = v/\sqrt{2}$$

La base ortonormale

BASE ORTONORMALE

$$b_i^\dagger b_j = \delta_{ij}$$

Norma uno per $i = j$; ortogonalità per $i \neq j$.

In una base ortonormale ogni coordinata si estrae con un prodotto interno

VETTORE

$$x \in \mathbb{C}^n$$



$$b_j^\dagger x$$



COORDINATA

$$c_j = b_j^\dagger x$$

RICOSTRUZIONE

$$x = \sum_j c_j b_j$$