CAPITOLO 4

Onde Elettromagnetiche



4.1 Onde Elettromagnetiche

- Introduzione alle onde elettromagnetiche;
- Onde elettromagnetiche piane;
- Proprietà delle onde elettromagnetiche piane e equazioni di Maxwell;
- Energia di un'onda elettromagnetica piana - vettore di Poynting;
- Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana – pressione di radiazione;
- Spettro delle onde elettromagnetiche;
- Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana;
- Onda elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante.

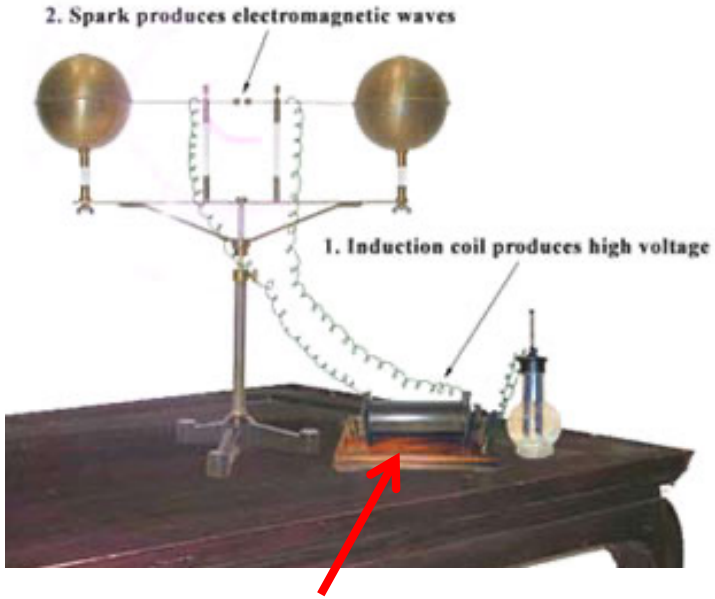
Testi consigliati:

- Mazzoldi-Nigro-Voci, Elementi di Fisica vol.II (Elettromagnetismo e Onde), 2a o 3a Edizione, Edises, Cap.10
- Presentazione POWERPOINT a lezione cap.4

Approfondimenti:

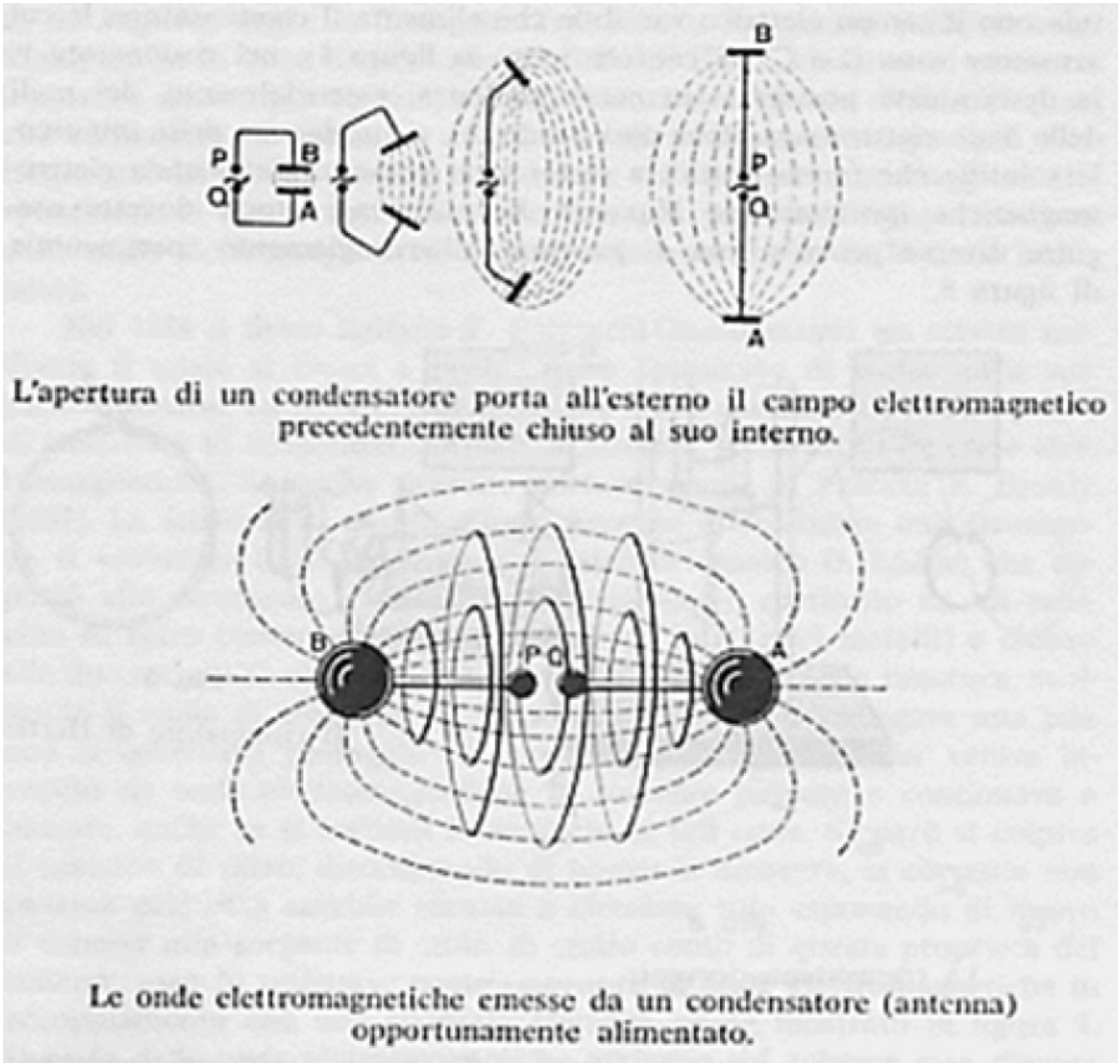
- Mazzoldi-Nigro-Voci, Fisica vol. II (Elettromagnetismo e Onde), (Edises), Cap.13

Dispositivo di Hertz



Rocchetto di Ruhmkorff

Sorgente di alimentazione che alimenta tramite un trasformatore due sfere C1 e C2. Tali sfere vengono caricate fino al valore di innesco della scarica delle sfere più piccole. Vengono emessi un campo elettrico *E* e un campo magnetico *B* che si propagano nello spazio

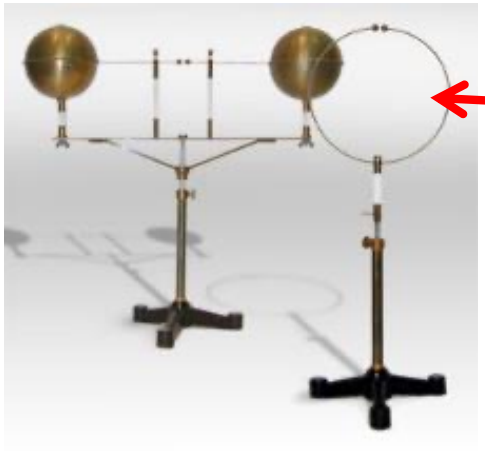


L'apertura di un condensatore porta all'esterno il campo elettromagnetico precedentemente chiuso al suo interno.

Le onde elettromagnetiche emesse da un condensatore (antenna) opportunamente alimentato.

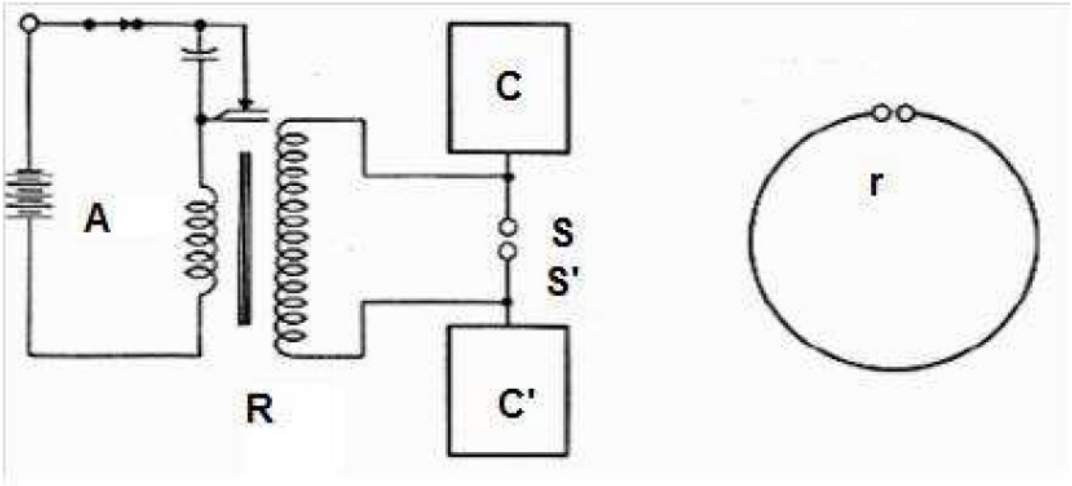
Esperienza di Hertz

Emettitore (Spinterometro)



Ricevitore

Circuito equivalente

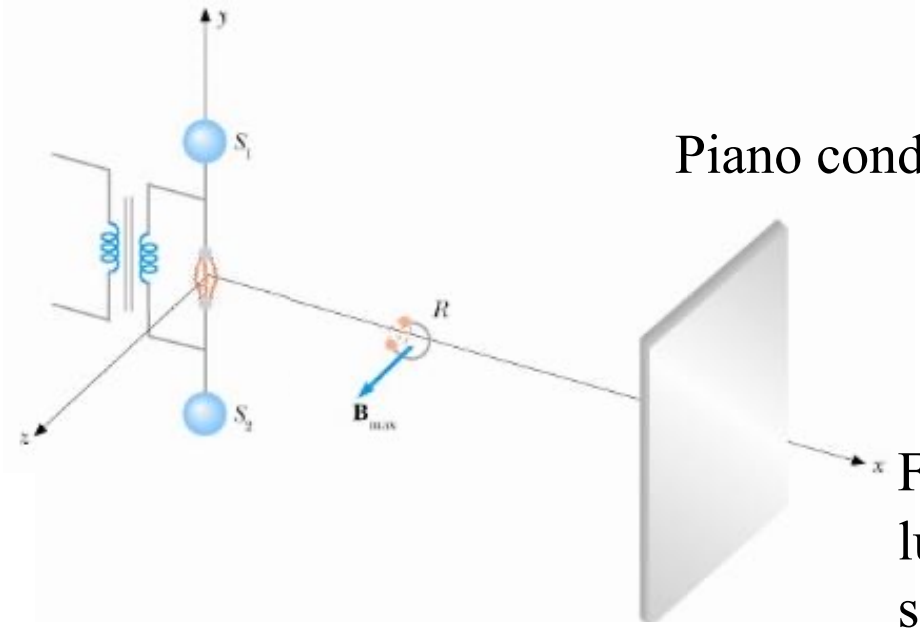


Oscillazioni di pulsazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ con L e C capacità ed induttanza del circuito equivalente

Esperienza di Hertz

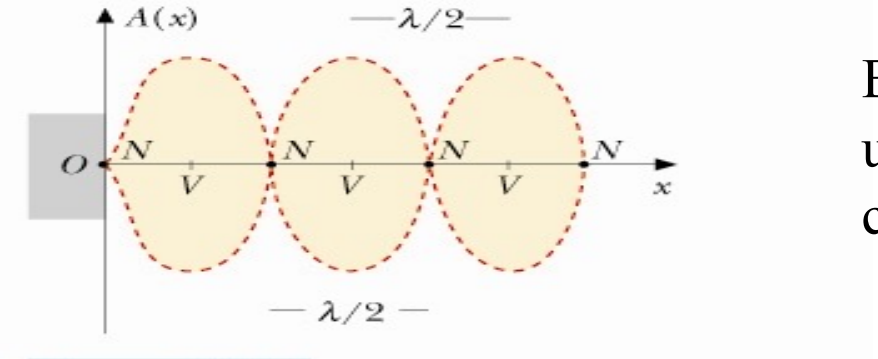


Esperienza di Hertz



Piano conduttore riflettente

Facendo muovere il ricevitore lungo l'asse x si visualizzano scintille secondarie più o meno evidenti



E' come se si fosse formata una onda stazionaria di campo magnetico

NEL VUOTO

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad div\ \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad rot\ \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



Equazioni D'Alembert per onde EM

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{E}$$

Equazioni d'Alembert per onde EM

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\hat{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\hat{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\hat{u}_z = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\left[(\nabla^2 E_x)\hat{u}_x + (\nabla^2 E_y)\hat{u}_y + (\nabla^2 E_z)\hat{u}_z\right]$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\nabla^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\nabla^2 E_y$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\nabla^2 E_z$$

Ciascuna componente del campo elettrico soddisfa l'equazione di d'Alembert

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \ \text{m/s}$$

Equazioni d'Alembert per onde EM

Analogamente da $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Si ottiene $\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{B}$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2 B_x$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2 B_y$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2 B_z$$

Ciascuna componente del campo magnetico soddisfa l'equazione D'Alembert

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99792458\cdot 10^8 \ \text{m/s}$$

In generale le equazioni

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

hanno come soluzione

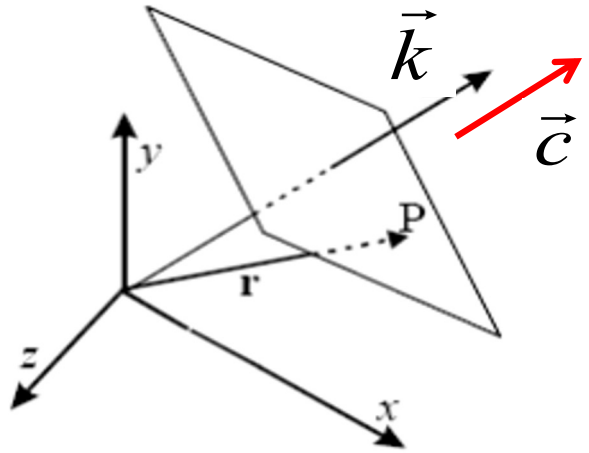
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

dove

$$\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z$$

$$c = \omega / \left|\vec{k}\right|$$



Consideriamo ad esempio l'equazione per una sola componente del campo elettrico:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 E_x \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

Avremo soluzioni del tipo

$$E_x = E_{0x} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = E_{0x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

con $\omega = c\left|\vec{k}\right|$ $\qquad \vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z$

In generale assumiamo che: $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z$.

$$E_x = E_{0x}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$
$$E_y = E_{0y}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$
$$E_z = E_{0z}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Quindi:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z$$

E infine

$$k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Similmente per il campo B, abbiamo: $\vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z$.

$$B_x = B_{0x}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$
$$B_y = B_{0y}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$
$$B_z = B_{0z}\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Quindi:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = ik_x B_x + ik_y B_y + ik_z B_z$$

E infine

$$k_x B_x + k_y B_y + k_z B_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_x = -\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_x \longrightarrow \left(ik_yE_z - ik_zE_y\right) = i\omega B_x$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_y = -\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_y \longrightarrow \left(ik_zE_x - ik_xE_z\right) = i\omega B_y$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z = -\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_z \longrightarrow \left(ik_xE_y - ik_yE_x\right) = i\omega B_z$$

$$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

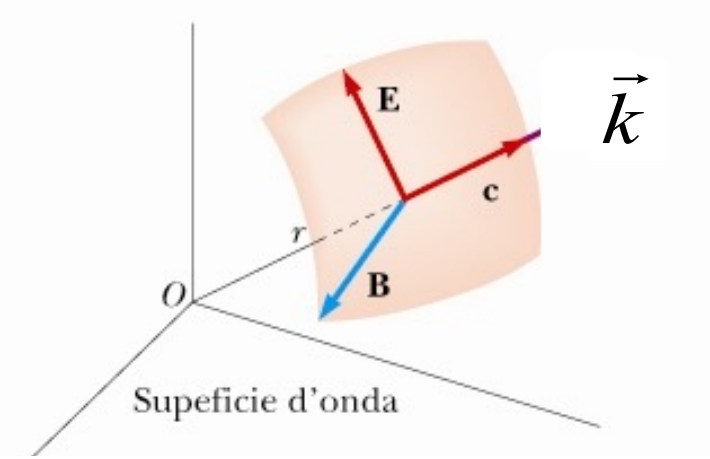
$$kE = \omega B$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$kE = \omega B$$

$$E = cB$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$



$$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{E}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)$$

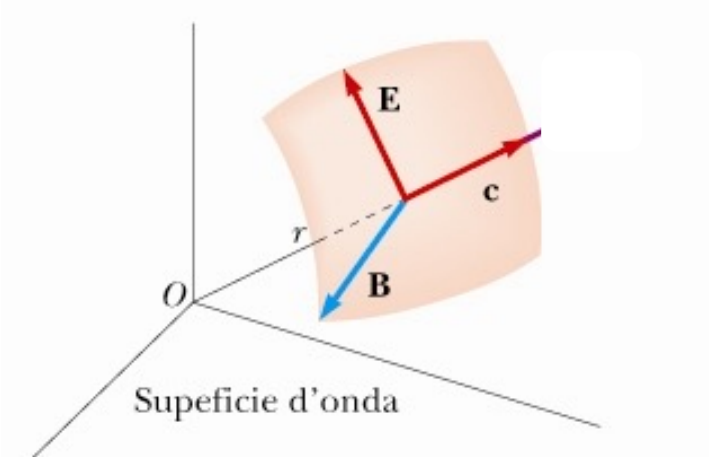
$$= \frac{1}{\omega}\vec{k}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right) - \frac{1}{\omega}\left(\vec{E}\cdot\vec{k}\right)\vec{E}$$

$$= \frac{1}{\omega}\vec{k}\,E^2 = \frac{1}{\omega}E^2 k\hat{u}_k = \frac{E^2}{c}\hat{u}_k$$

Ricordiamo che

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$\vec{E}\times\vec{B}$ nella direzione di propagazione

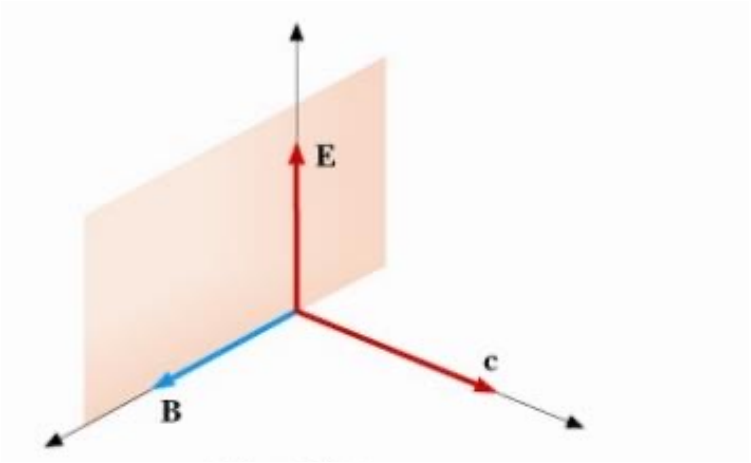


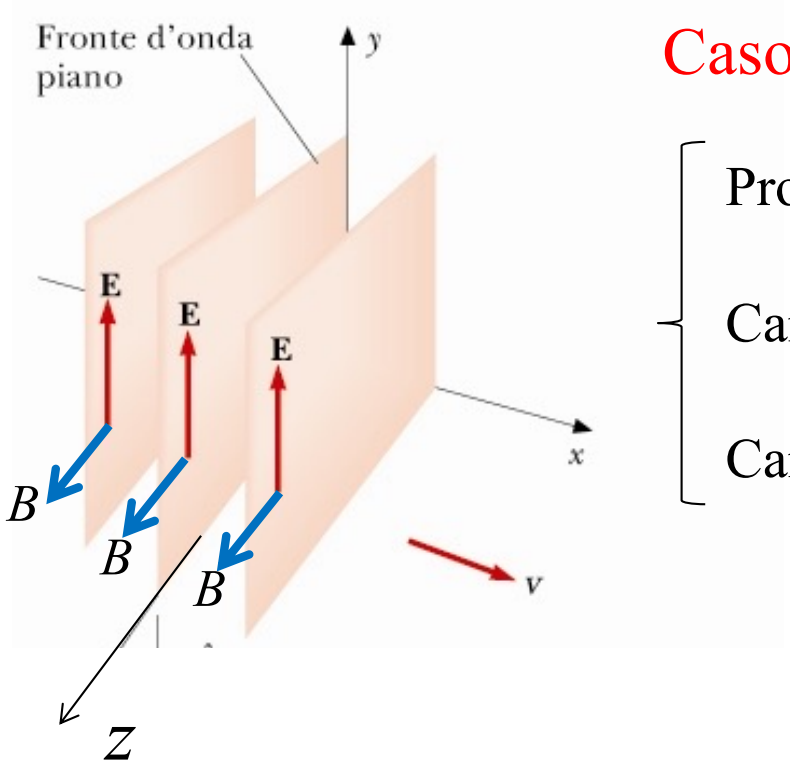
E e B si propagano nel vuoto con la velocità $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$ m/s

I moduli dei campi sono legati dalla relazione $B = E/c$

E e B sono ortogonali tra loro ed alla direzione di propagazione

Il prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$ fornisce il verso di propagazione





Caso semplificato

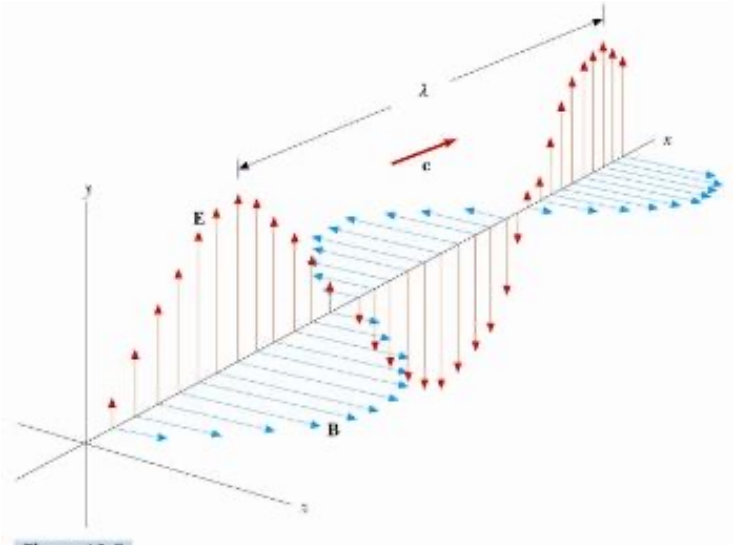
- Propagazione lungo asse x
- Campo elettrico lungo asse y
- Campo magnetico lungo asse z

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_y \qquad \vec{B} = B_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_z$$

E ed ***B*** dipendono solo da x

$$E = cB$$

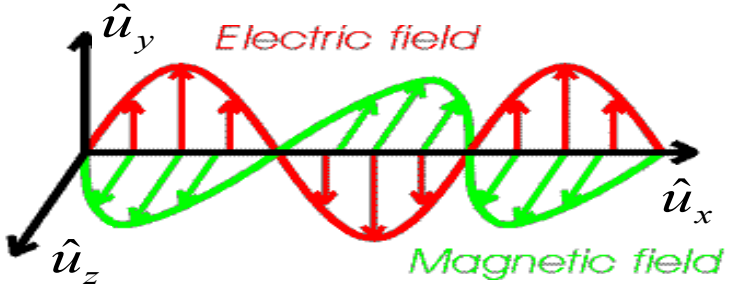
$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_y \qquad \vec{B} = B_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{u}_z$$

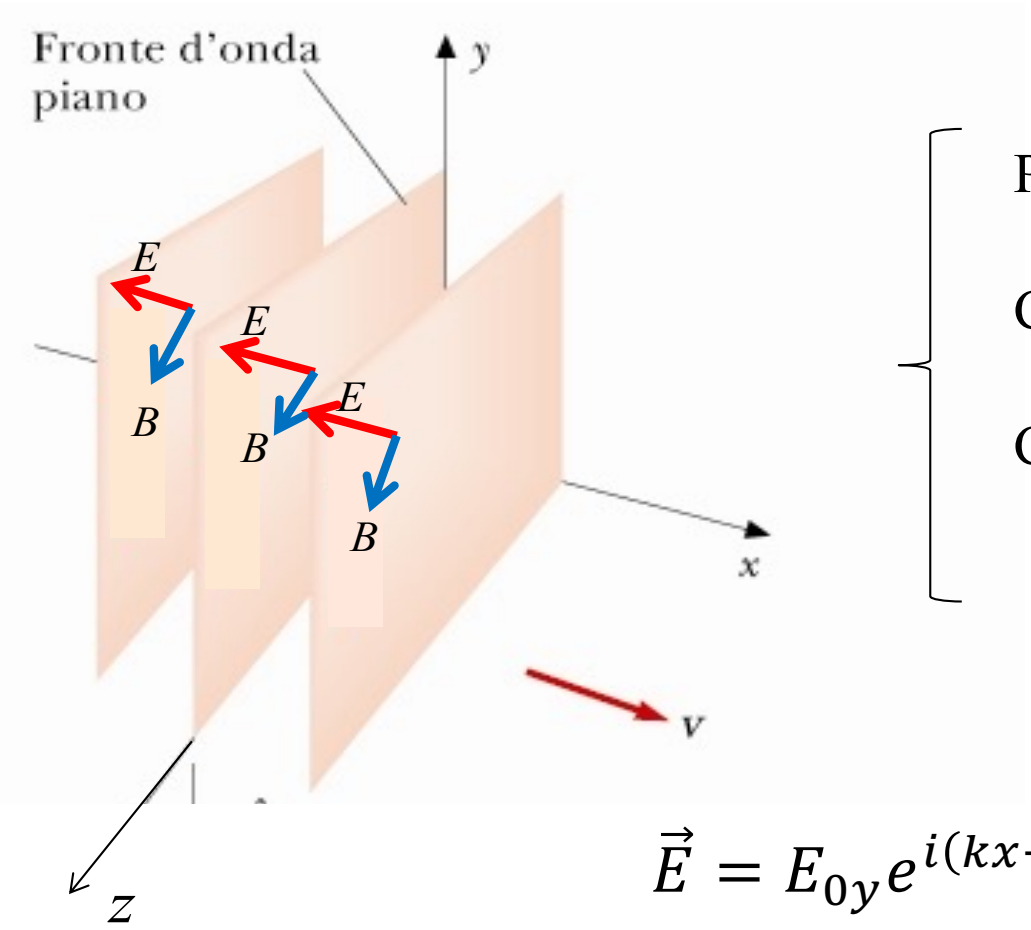


$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$

$$E = Bc$$

$$\vec{E}\times\vec{B} = EB\hat{u}_x$$





In generale

Propagazione lungo asse *x*

Campo elettrico nel piano *y-z*

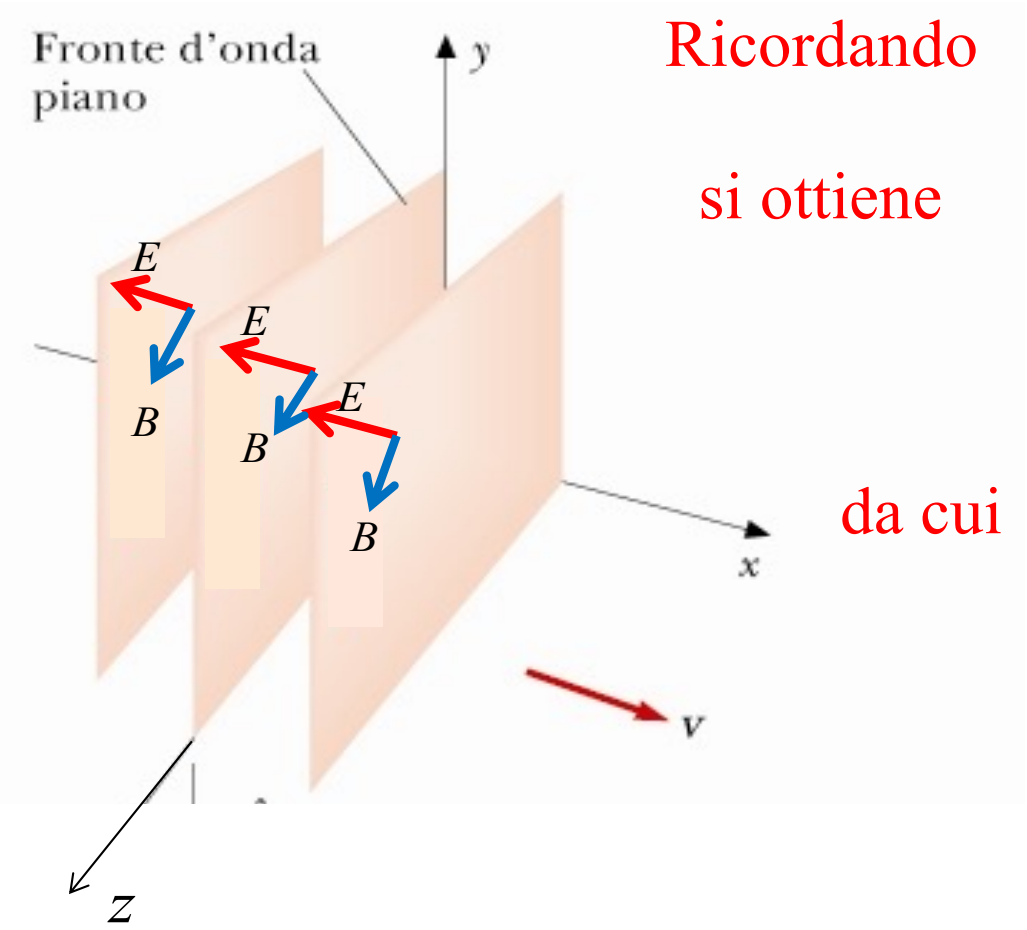
Campo magnetico nel piano *y-z*

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{E} = E_{0y} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_y + E_{0z} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_{0y} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_y + B_{0z} e^{i(kx-\omega t)} \hat{u}_z$$

E ed ***B*** dipendono solo da *x*



Ricordando $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$ $\quad \vec{k} = k\hat{u}_x$

si ottiene $-kE_z = \omega B_y$

$kE_y = \omega B_z$

da cui $B_y = -\frac{E_z}{c}$ $\quad B_z = \frac{E_y}{c}$

$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c}\hat{u}_y + \frac{E_y}{c}\hat{u}_z$$

E ed ***B*** dipendono solo da *x*

Se $\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$

$$\vec{B} = -\frac{E_z}{c}\hat{u}_y + \frac{E_y}{c}\hat{u}_z$$

Si verifichi che

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$E = cB$$

$\vec{E} \times \vec{B}$ indica la direzione di propagazione

abbiamo visto che:

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z$$

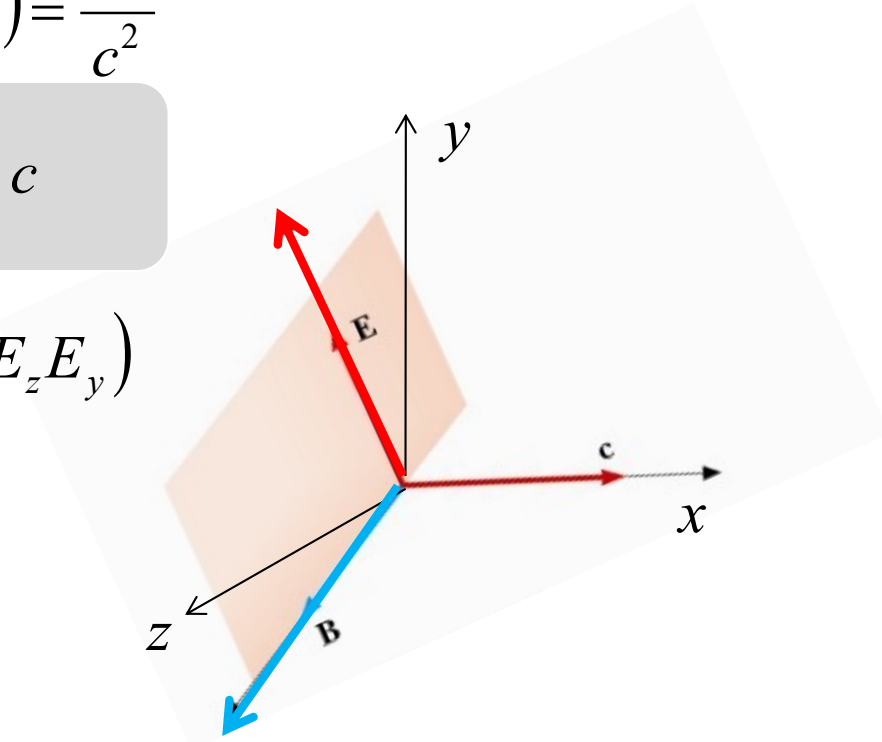
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{E_z}{c}\hat{u}_y + \frac{E_y}{c}\hat{u}_z$$

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{c^2}\left(E_y^2 + E_z^2\right) = \frac{E^2}{c^2}$$

$$B = \frac{E}{c}, \qquad E = cB, \qquad \frac{E}{B} = c$$

Inoltre $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{c}\left(-E_y E_z + E_z E_y\right)$

$$\Rightarrow \qquad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

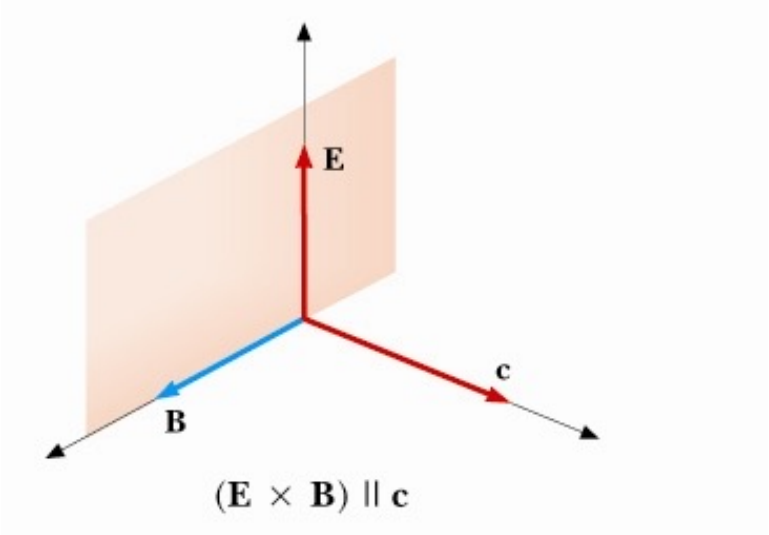


Calcoliamo il prodotto vettoriale fra E e B

$$\vec{E} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z \qquad \vec{B} = -\frac{E_z}{c}\hat{u}_y + \frac{E_y}{c}\hat{u}_z$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}\left(E_y^2 + E_z^2\right)\hat{u}_x \Rightarrow$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{c}\hat{u}_x = cB^2\hat{u}_x = EB\hat{u}_x$$



$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_z = E_{0z} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = ikE_{0z} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$B_y = \int \frac{\partial E_z}{\partial x} dt$$

$$B_y = \int ikE_{0z} e^{i(kx-\omega t)} dt$$

$$B_y = -\frac{kE_{0z}}{\omega} \int e^{i(kx-\omega t)} d\left[i(kx-\omega t)\right]$$

$$B_y = -\frac{kE_{0z}}{\omega} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$B_y = -\frac{E_{0z}}{c} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = ikE_{0y} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt$$

$$B_z = -\int ikE_{0z} e^{i(kx-\omega t)} dt$$

$$B_z = \frac{kE_{0y}}{\omega} \int e^{i(kx-\omega t)} d\left[i(kx-\omega t)\right]$$

$$B_z = \frac{kE_{0y}}{\omega} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$B_z = \frac{E_{0y}}{c} e^{i(kx-\omega t)}$$

Assumiamo che il campo elettrico E e il campo magnetico B dipendano, in un dato sistema di riferimento cartesiano, solo dal tempo e dalla coordinata x, assumendo pertanto lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse x.

$$E_x(x,\ t),\quad E_y(x,\ t),\quad E_z(x,\ t)$$

In questa ipotesi sono nulle tutte le derivate parziali rispetto a y e z

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Similmente

$$B_x(x,\,t),\quad B_y(x,\,t),\quad B_z(x,\,t)$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{B}}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\partial E_x / \partial x = 0$$
$$\partial E_x / \partial t = 0$$

La componente $E_x(x, t)$ del campo elettrico è costante.

Un campo del genere potrebbe essere prodotto da una distribuzione di cariche stazionarie; dato però che non consideriamo l'esistenza di sorgenti di questo tipo, in quanto interessati a campi variabili nel tempo, concludiamo che:

$$E_x(x, t) = 0$$

$$\partial B_x / \partial x = 0$$
$$\partial B_x / \partial t = 0$$

Analogamente, dall'esclusione di correnti stazionarie, si conclude che:

$$B_x(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Derivando rispetto a x

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Derivando rispetto a t si ha:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Derivando rispetto a t

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

Derivando rispetto a x si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

Se invertiamo l'ordine delle derivate, si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

Ognuna delle componenti del campo elettrico E e del campo magnetico B soddisfa all'equazione differenziale delle onde piane:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t} \qquad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z)$$

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \ \text{m/s}$$

In un mezzo di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ (ma sempre in assenza di sorgenti):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu\varepsilon} = v^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \qquad v < c$$

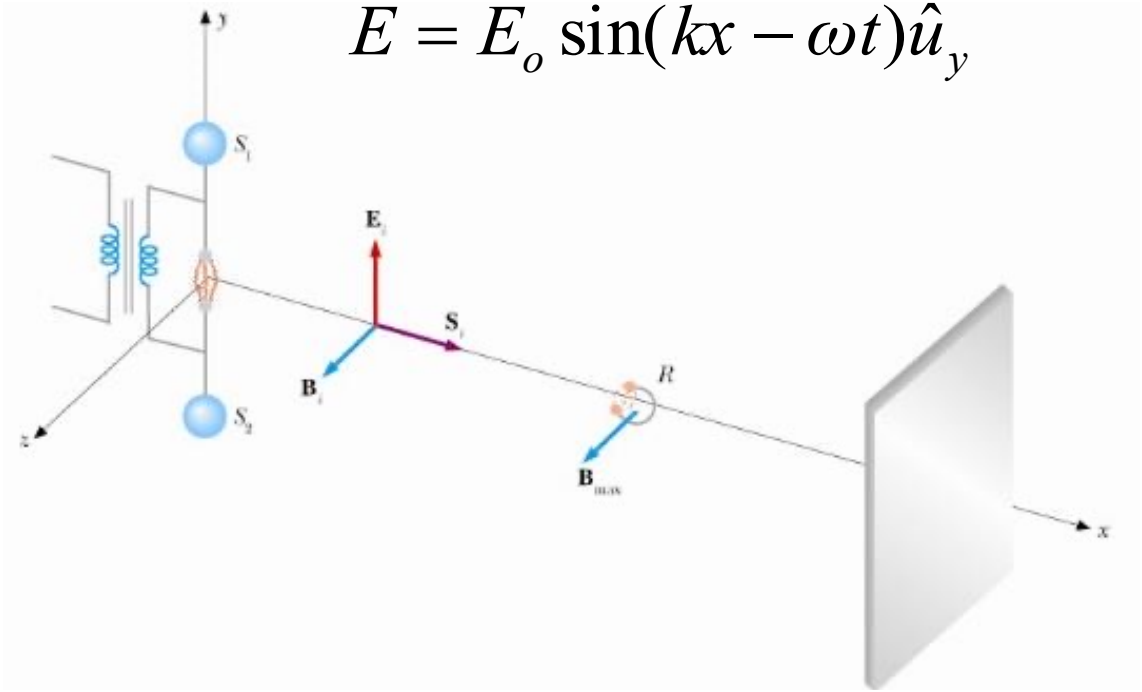
Nella maggioranza dei mezzi ordinari $\mu_r = 1$ $\qquad v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

Definiamo $n = \dfrac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r}$ Indice di rifrazione del mezzo

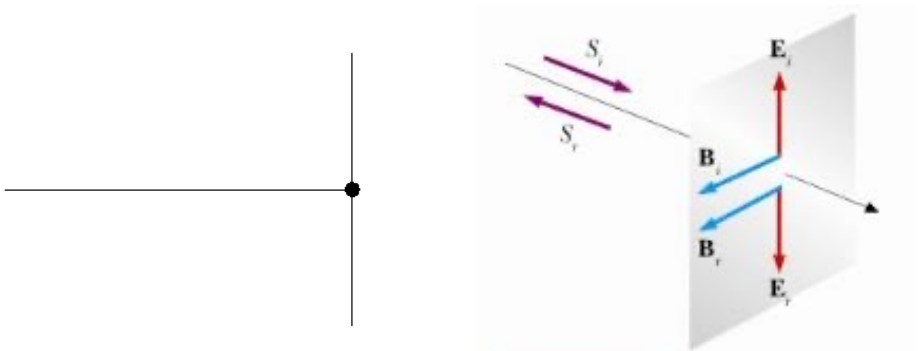
$Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega$ Impedenza del vuoto

$Z = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \dfrac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{Z_0}{n}$ Impedenza del mezzo

$$\vec{E} = E_o \sin(kx - \omega t)\hat{u}_y$$

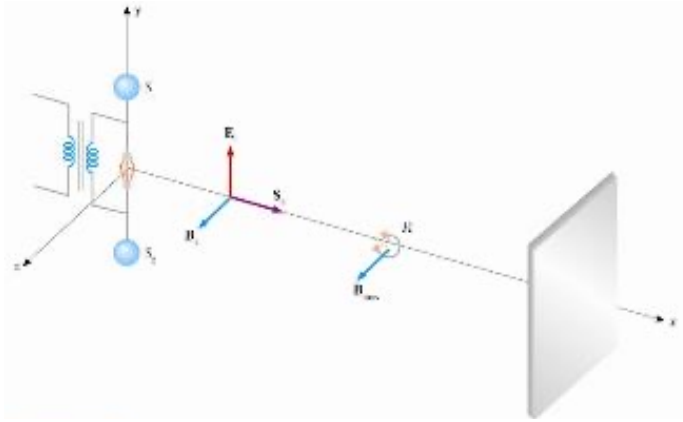


Il campo elettrico nel conduttore deve essere nullo. Il piano conduttore rappresenta un nodo dell'onda stazionaria



Si formano onde stazionarie

$$\vec{E} = 2E_o \sin(kx)\cos(\omega t)\,\hat{u}_y$$



$$\vec{E} = 2E_o \sin(kx)\cos(\omega t)\,\hat{u}_y$$

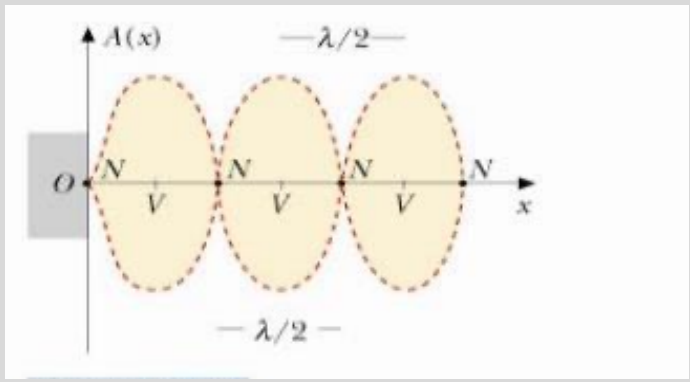
$$\vec{B} = 2\frac{E_0}{c} sin(kx)\, cos(\omega t)\,\hat{u}_z.$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 2\frac{E_0}{c}\Sigma\omega \sin(kx)\sin(\omega t)$$

Massimo nei ventri $\varepsilon = 2E_0\Sigma\omega/c$

Minimo nei nodi $\varepsilon = 0$

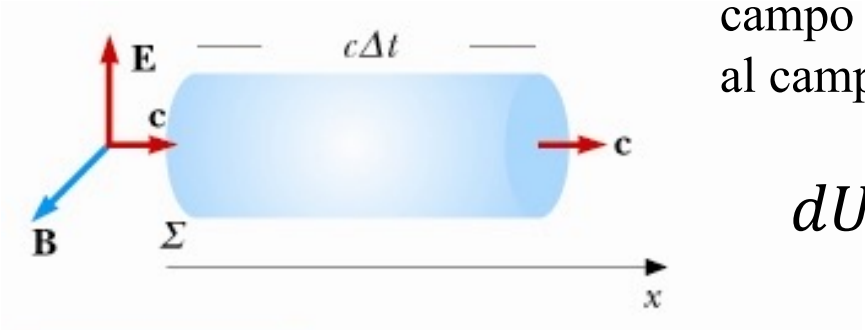


Vettore di Poynting

La presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico nel vuoto comporta la presenza di una certa quantità di energia distribuita nello spazio, la cui densità per il campo elettrico e magnetico è data da:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

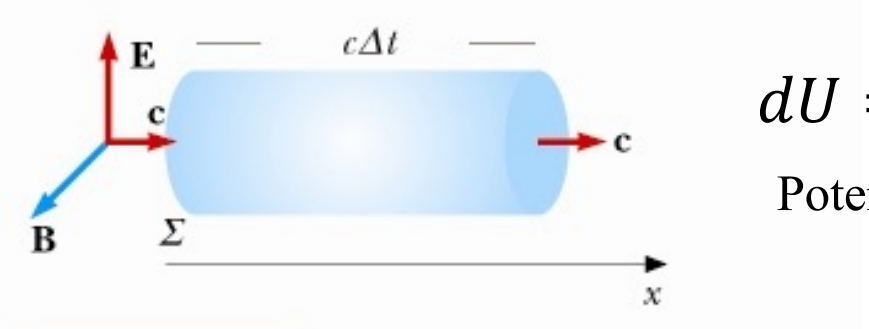
$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ E = cB \end{cases} \longrightarrow u = \varepsilon_0 E^2 \qquad u = \frac{B^2}{\mu_0}$$



L'energia associata all'onda è per metà dovuta al campo di induzione magnetica e per metà dovuta al campo elettrico

$$dU = ud\tau = u\Sigma cdt = \varepsilon_0 E^2 \Sigma cdt$$

Vettore di Poynting



$$dU = ud\tau = u\Sigma cdt = \varepsilon_0 E^2 \Sigma cdt$$

Potenza che attraversa Σ:

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 E^2 \Sigma c$$

Ricordando che c è il modulo della velocità dell'onda elettromagnetica e che la direzione di propagazione è quella dell'asse x, definiamo il vettore ***S:***

$$\vec{S} = \varepsilon_0 E^2 \vec{c} = \varepsilon_0 E^2 c\hat{u}_x = \varepsilon_0 c^2 EB\hat{u}_x$$

$$\vec{E}\times\vec{B} = EB\hat{u}_x \longrightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$$ Vettore di Poynting

La potenza è: $\mathcal{P} = \varepsilon_0 \mathrm{E}^2 \mathrm{c}\Sigma = \varepsilon_0 \mathrm{E}^2 \mathrm{c}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{x} \cdot \Sigma\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{x} = \vec{S} \cdot \Sigma\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{x} = \Phi\left(\vec{S}\right)$

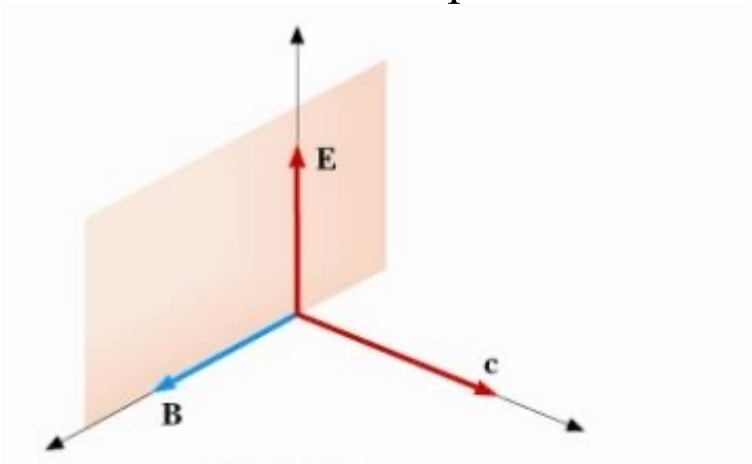
$$[S] = [\mathrm{Watt/m^2}]$$

Il vettore ***S*** ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione dell'onda e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Se la superficie non è ortogonale, e in generale si ha, detto $\boldsymbol{u_n}$ il versore ortogonale a Σ:

$$\mathcal{P} = \Phi(\vec{S}) = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

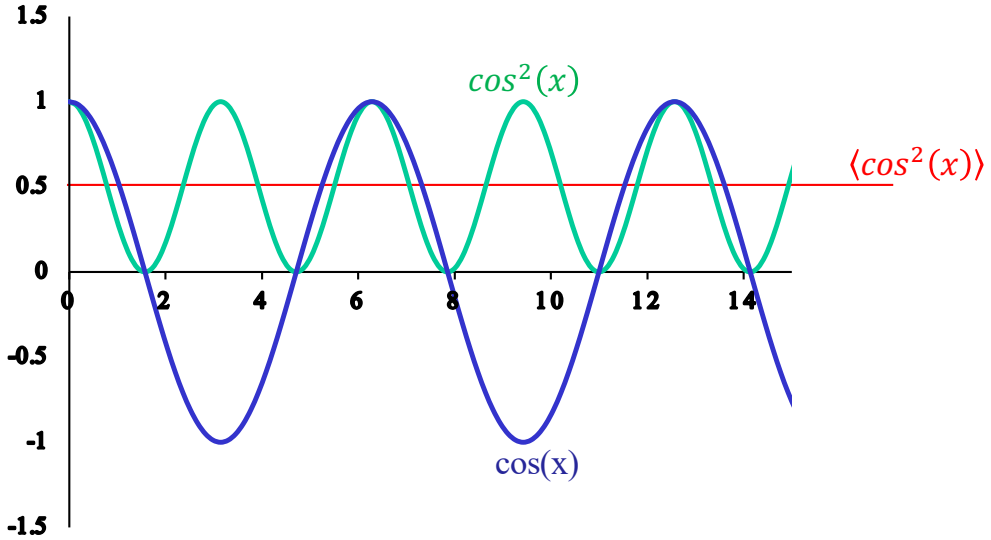
Consideriamo un'onda piana

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{u}_y$$



$$S = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Vettore di Poynting



Calcoliamo il valore medio del vettore di Poynting:

$$< S >= \varepsilon_0 c < E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) >$$

Intensità $$I = < S >= \varepsilon_0 c E_0^2 < \cos^2(kx - \omega t) >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

$$I = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\right) c$$

c → Velocità

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$ → Densità media di energia

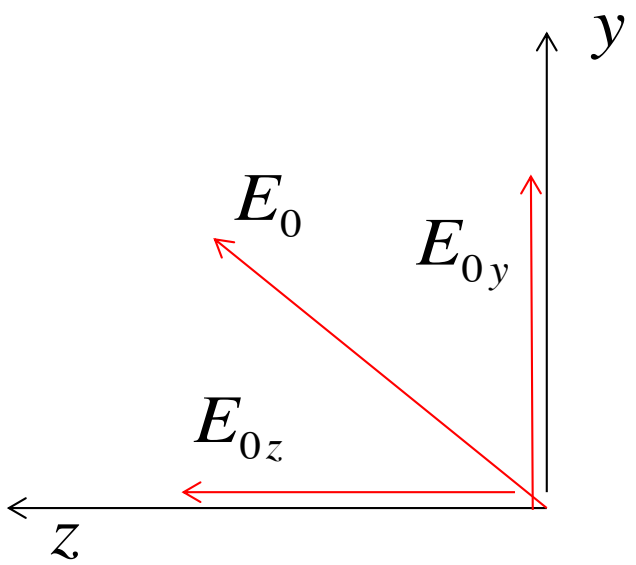
*Intensità = densità di energia * velocità*

Nel caso più generale

$$\vec{E} = E_{0y}\cos(kx-\omega t)\hat{u}_y + E_{0z}\cos(kx-\omega t)\hat{u}_z$$

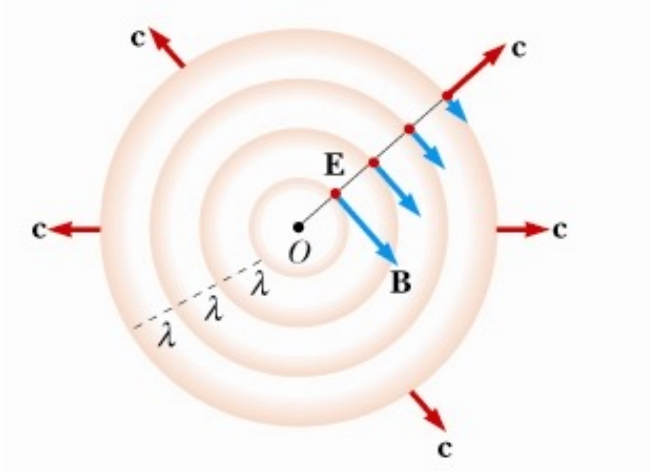
$$< S >= I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$$

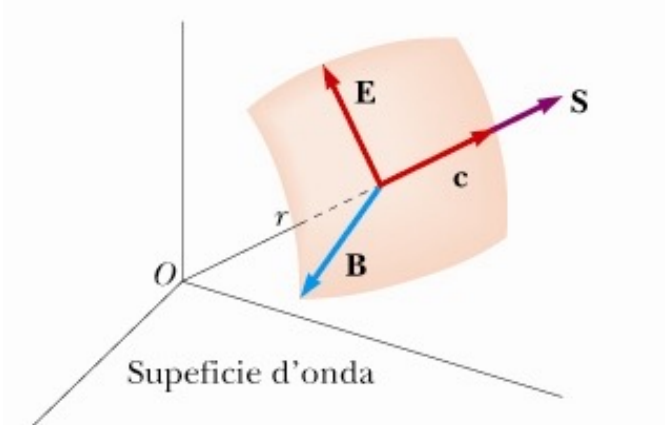
$$I = \frac{E_{0y}^2}{2Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$



Onda sferica

($\hat{u}_E$ indica la direzione di E)





$$\vec{E}(r,t) = A(r)\cos(kr-\omega t)\,\hat{u}_E$$

$$\langle P\rangle = cost \propto A(r)^2 \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad A(r) \propto 1/r$$

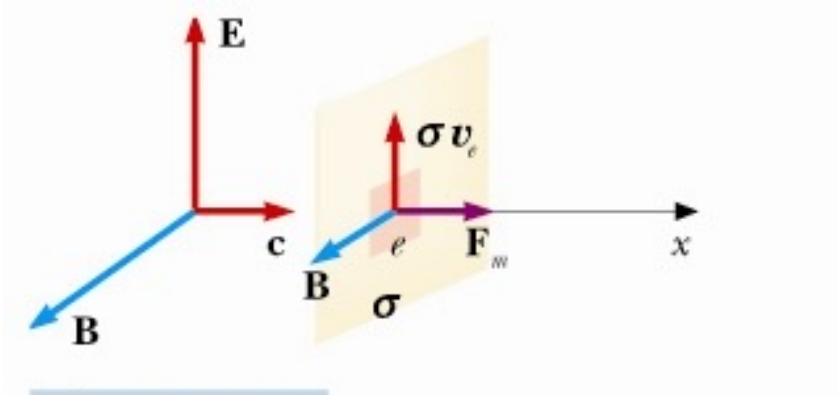
$$\vec{E}(r,t) = (E_0/r)\cos(kr-\omega t)\,\hat{u}_E$$

Intensità $$I = < S > = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2}$$

Potenza attraverso una sfera di raggio *r*: $$\mathcal{P} = I\Sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2}\, 4\pi r^2 = 2\pi\varepsilon_0 c E_0^2$$

Oltre a trasportare energia, le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto, quindi esercitano una pressione detta di "radiazione" su un oggetto illuminandolo.

Consideriamo una superficie piana Σ ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda (quindi parallela al campo E) su cui sia depositata una carica q con densità superficiale σ uniforme.



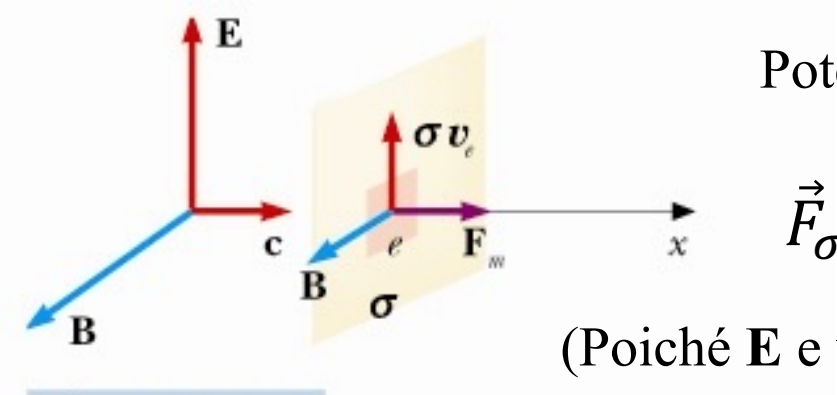
La forza di Lorentz, esercitata sull'elemento di superficie **dΣ** su cui è depositata la carica **dq**, esercitata dai campi E e B che costituiscono l'onda è:

$$\overrightarrow{dF_q} = dq\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

v è la velocità di deriva delle cariche per effetto della forza elettrica

Poiché le cariche sono distribuite sulla superficie piana Σ con densità superficiale σ, possiamo calcolare la forza di Lorentz per unità di superficie:

$$\vec{F}_\sigma = \frac{\overrightarrow{dF_q}}{d\Sigma} = \frac{dq}{d\Sigma}\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$



Potenza assorbita per unità di superficie:

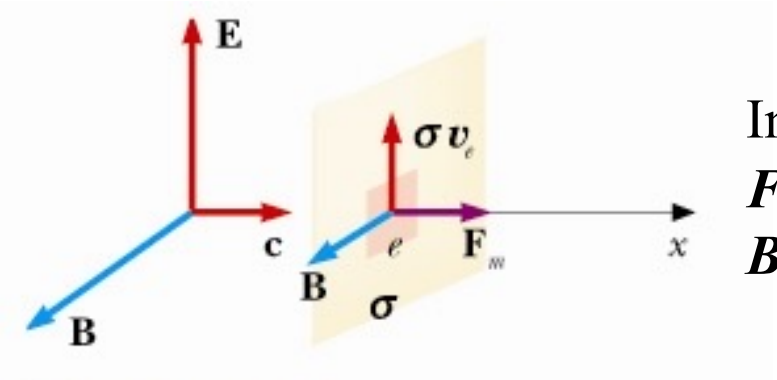
$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{v} = \sigma\left(\vec{E} \cdot \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}\right) = \sigma E v$$

(Poiché **E** e **v** sono paralleli la potenza è sempre positiva)

In media l'energia assorbita per unità di tempo e per unità di superficie, cioè l'intensità ceduta dall'onda, vale:

$$I = \sigma\langle Ev \rangle$$

n.b. A questo assorbimento non corrisponde un effetto meccanico globale sulla superficie perché il campo è parallelo alla superficie.



Invece la forza magnetica (per unità di superficie) $\boldsymbol{F_m}$ dà origine ad un effetto meccanico, nonostante $\boldsymbol{B}$ non contribuisca alla potenza assorbita

$\boldsymbol{F_m}$ è normale alla superficie Σ ed è concorde con $\vec{E}\times\vec{B}$ cioè con $\hat{u}_x$ qualunque sia il segno di σ (se σ cambia segno cambia il verso di v)

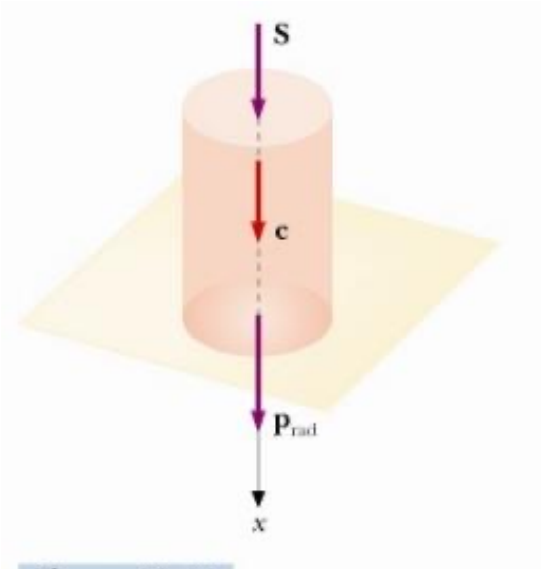
$$\vec{F}_m = \sigma\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right) = \sigma v B \hat{u}_x$$

E la forza media per unità di superficie, cioè la variazione di quantità di moto per unità di tempo e superficie sarà:

$$\langle F\rangle = \sigma\langle Bv\rangle = \sigma\left\langle\frac{Ev}{c}\right\rangle = \sigma\frac{\langle Ev\rangle}{c} = \frac{\sigma\langle Ev\rangle}{c} = \frac{I}{c}$$

Questa forza media per unità di superficie corrisponde ad una pressione media, detta pressione di radiazione, che viene esercitata dall'onda sulla superficie Σ

$$p_{rad} = \frac{I}{c}$$



In conclusione, se l'onda cede alla superficie Σ energia, essa cede anche una quantità di moto I/c

Se l'onda viene completamente riflessa la quantità di moto trasferita sarà doppia rispetto al caso precedente, ovvero:

$$p_{rad} = \frac{2I}{c}$$

Se l'onda viene parzialmente riflessa e parzialmente assorbita, la quantità di moto trasferita è compresa tra I/c e $2I/c$

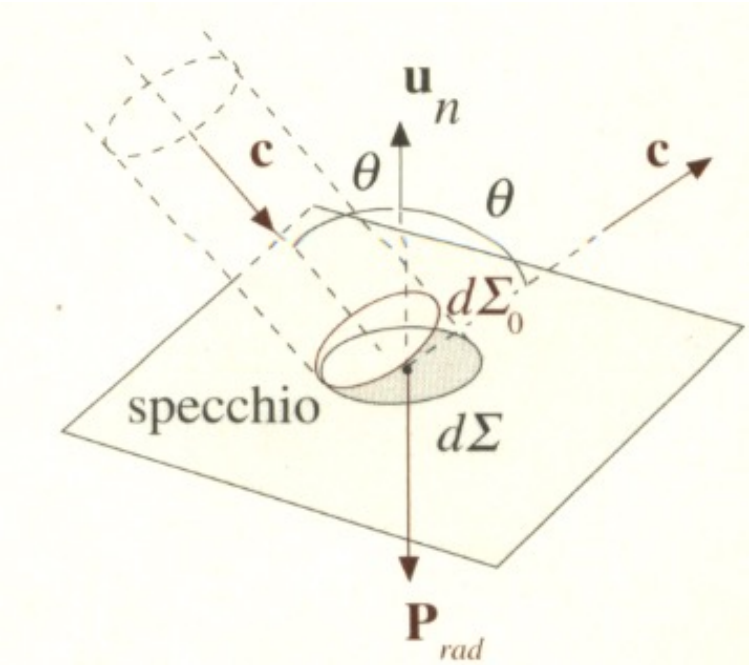
Nel caso in cui l'onda piana incidente formi un angolo θ con la normale alla superficie Σ, si ha una riduzione della pressione di radiazione. A parità della sezione dell'onda incidente l'area colpita è maggiore e quindi la pressione diminuisce di un fattore $cos\theta$. Inoltre va considerata solo la componete $cos\theta$ della radiazione.

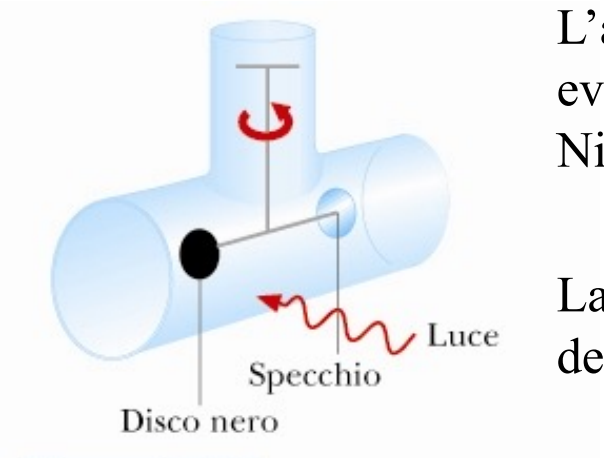
Completo assorbimento:

$$P_{rad} = \frac{I}{c}\cos^2\theta$$

Completa riflessione:

$$P_{rad} = \frac{2I}{c}\cos^2\theta$$





L'azione della pressione di radiazione è stata messa in evidenza con la bilancia di torsione (esperimento di Nichols e Hull -1903)

La pressione di radiazione provoca una rotazione dei bracci della bilancia di un angolo θ

Nota: nel contenitore che contiene lo strumento è praticato un vuoto spinto, in quanto se ci fosse aria o un altro gas si osserverebbe una rotazione in senso contrario.

⇓ Perché?

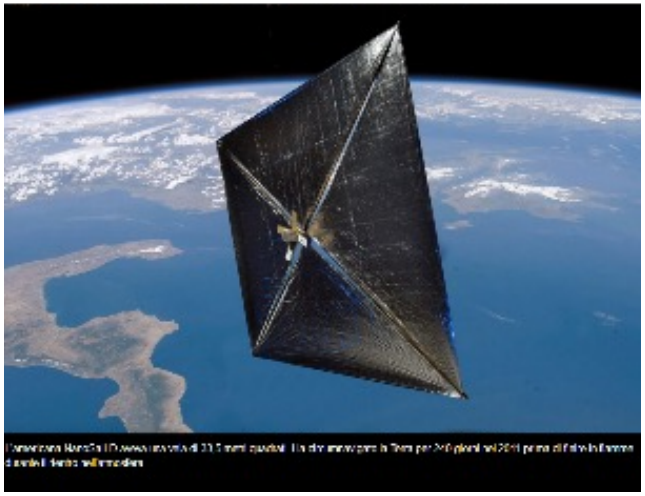
Il disco nero assorbendo energia, cede calore al gas che lo circonda facendo aumentare la velocità quadratica media delle molecole, che tramite urti esercitano una pressione maggiore che sul disco speculare.



Radiometro di Crookes

Il radiometro è costituito da un bulbo di vetro da cui l'aria è stata in gran parte rimossa, per formare un vuoto parziale. All'interno del bulbo, su una sede a basso attrito, c'è un rotore con diverse (di solito quattro) piastrine di metallo leggero poste in verticale. Le piastrine sono lucidate a specchio o dipinte di bianco su un lato, e nere sull'altro. Se esposto alla luce del sole, luce artificiale o radiazioni infrarosse (anche il calore di una mano posta vicino può essere sufficiente), le piastrine cominciano a ruotare senza nessun apparente motore che le spinga, nel senso di avanzamento del lato bianco.

Vele solari

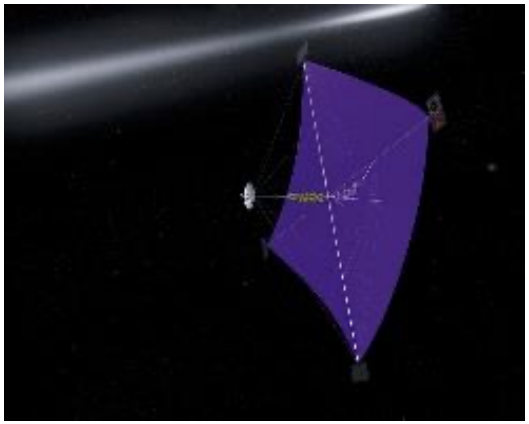


Alla distanza della Terra dal Sole la pressione di radiazione è pari a 10^{-5} Pa e decresce con il quadrato della distanza dalla sorgente di luce. Anche se la spinta è piccola, essa continuerà finché la sorgente luminosa splende e la vela è dispiegata.

Il meccanismo della vela solare viene utilizzato occasionalmente in combinazione con i sistemi di propulsione ordinari per le sonde e i satelliti. Ciò consente di risparmiare del carburante che altrimenti sarebbe destinato per le correzioni dell'assetto e le modificazioni dell'orbita. Per esempio il satellite geostazionario per le telecomunicazioni Eurostar E3000 della EAD Astrium usa dei pannelli di vele solari attaccati alle celle fotovoltaiche per scaricare il momento angolare trasversale, risparmiando così carburante. Alcune missioni senza equipaggio (come la Mariner 10) hanno sostanzialmente esteso la loro durata grazie a queste pratiche.

Navicella di massa m, superficie della vela Σ, vela perfettamente riflettente

Calcolare m/Σ per cui la forza di attrazione del sole uguaglia la forza della pressione di radiazione



$$P_{Sole} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W} \qquad \text{M}_{\text{Sole}} = 1.98 \cdot 10^{30} Kg$$

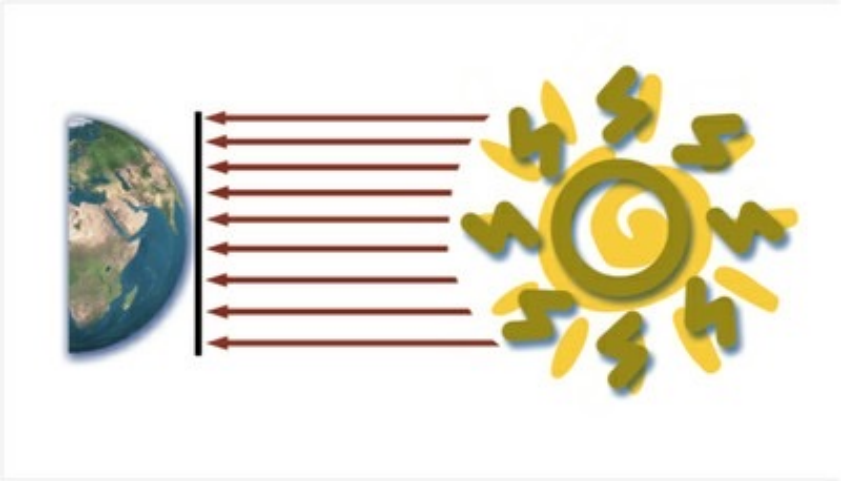
$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \qquad F_{rad} = \frac{2I}{c}\Sigma = \frac{2P_{Sole}}{4\pi r^2 c}\Sigma \qquad F_{Grav} = G\frac{mM_{Sole}}{r^2}$$

$$F_{Grav} = F_{rad} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\Sigma} = \frac{\text{P}_{\text{Sole}}}{2\pi c G M_{Sole}} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^2$$

$$m = 1000 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad \Sigma \approx 10^6 \text{ m}^2$$

Intensità sulla superficie della terra

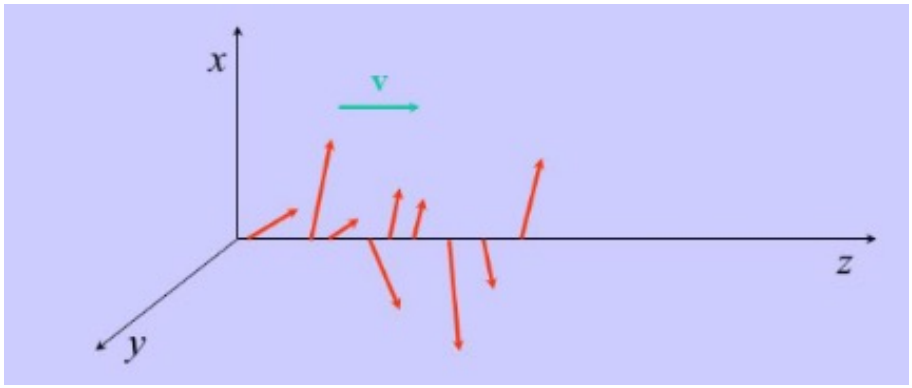
$$I = \frac{P_{Sole}}{4\pi R^2_{TS}} = 1370 \text{ W/m}^2$$



Nel caso della Terra la 'sezione' utile ai fini dell'intercettazione della radiazione solare corrisponde approssimativamente a un cerchio di raggio medio pari a 6367 km. Questo cerchio, considerata la distanza media della Terra dal Sole, se fosse disposto perpendicolarmente alla direzione di provenienza dai raggi solari e in assenza di atmosfera, riceverebbe una *potenza radiante* pari a 174 milioni di GW .

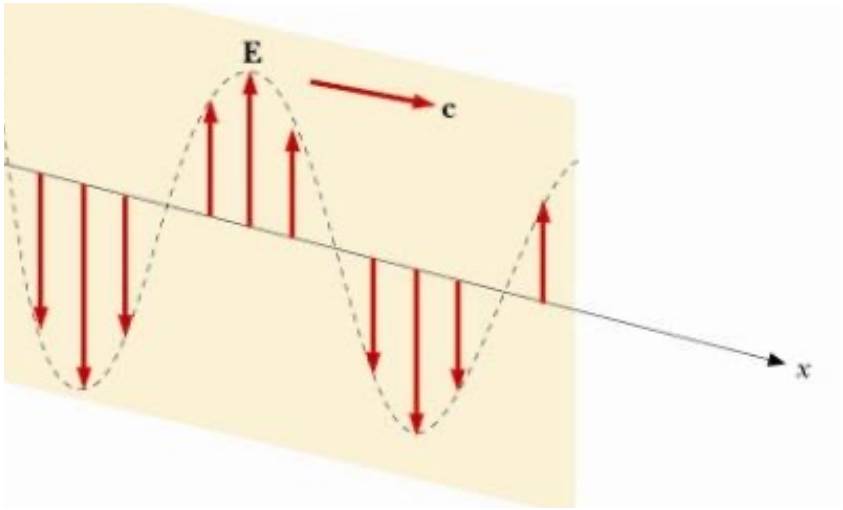
Per avere una idea dell'ordine di grandezza si pensi che in Italia l'intera potenza elettrica installata ammontava nel 2011 a "solo" 110 GW circa.

Il campo elettrico oscilla in piani differenti

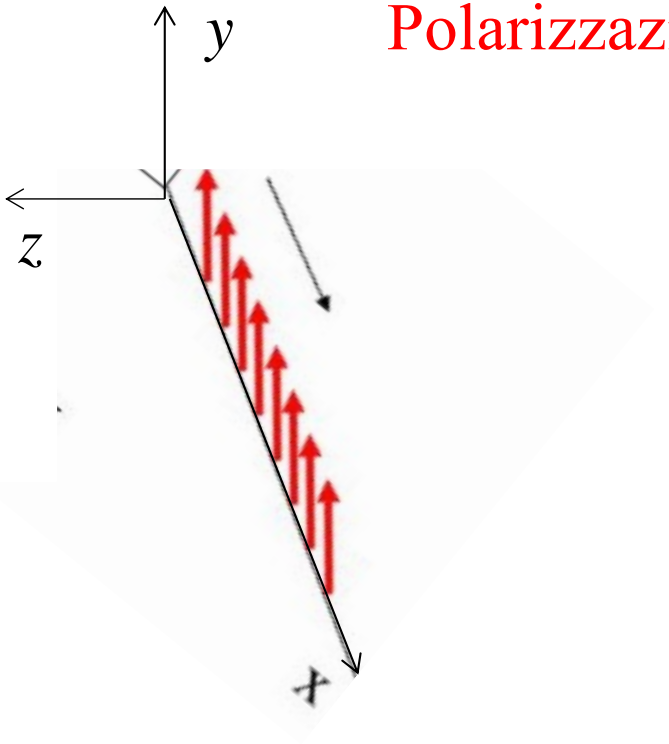


Onda piana non polarizzate

Il campo elettrico oscilla sempre sullo stesso piano



Onda piana polarizzate rettilineamente



Polarizzazione rettilinea

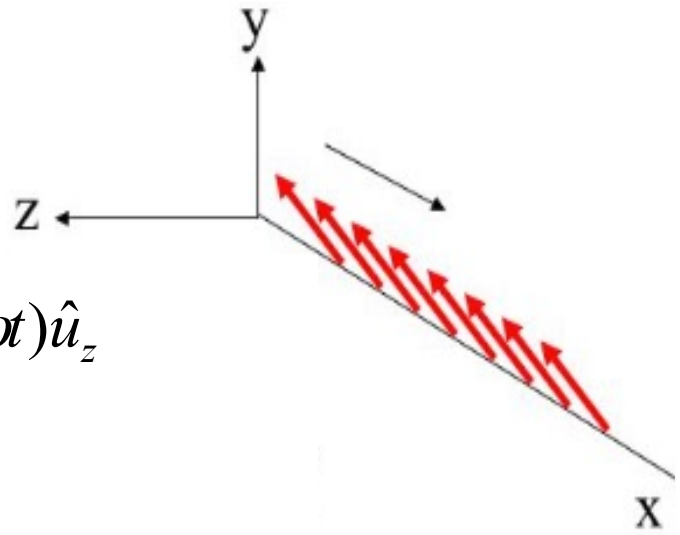
$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$

Direzione di polarizzazione

Coincide con la direzione del campo E

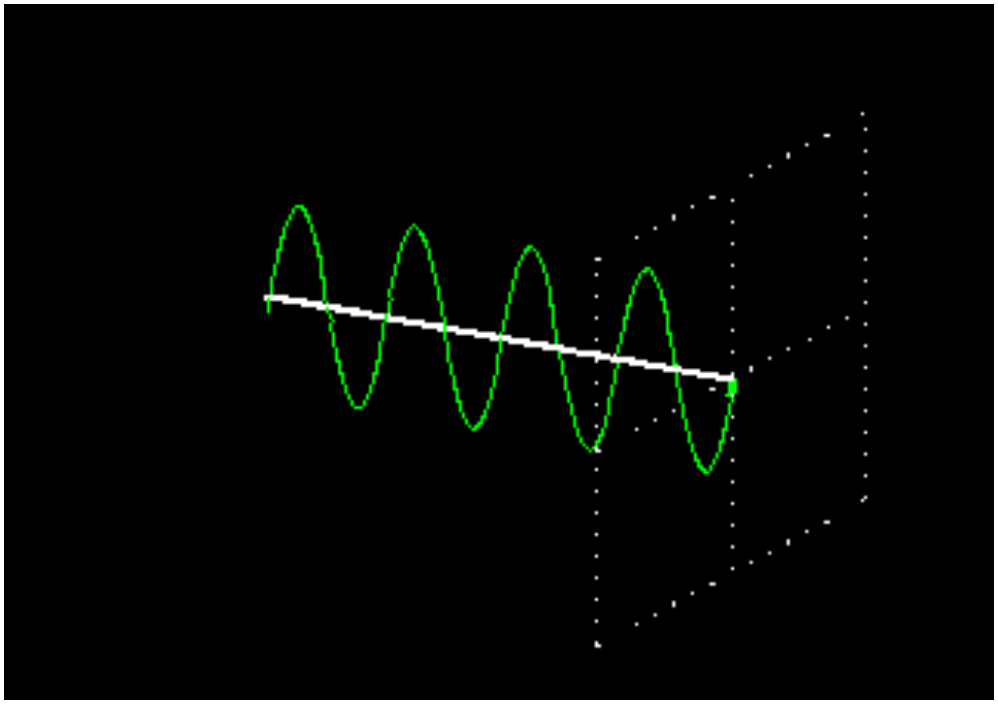
Piano di polarizzazione

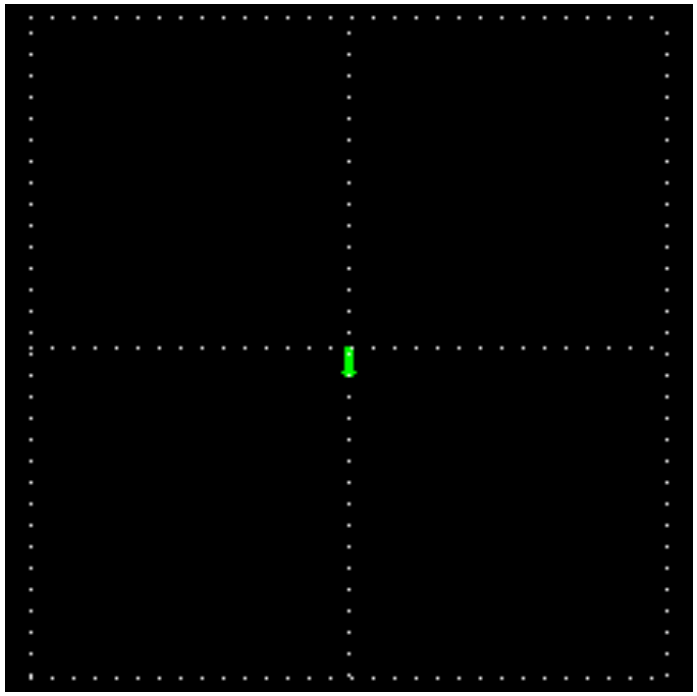
Piano formato dal vettore E con la direzione di propagazione



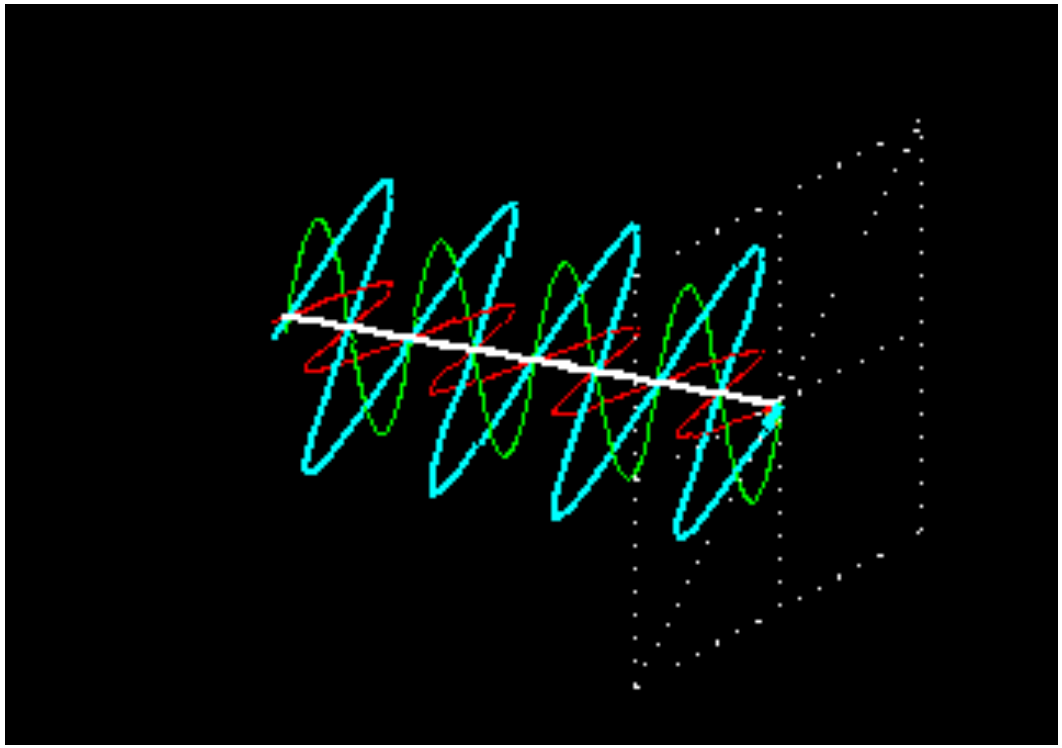
$$\vec{E} = E_{0y}\cos(kx - \omega t)\hat{u}_y + E_{0z}\cos(kx - \omega t)\hat{u}_z$$

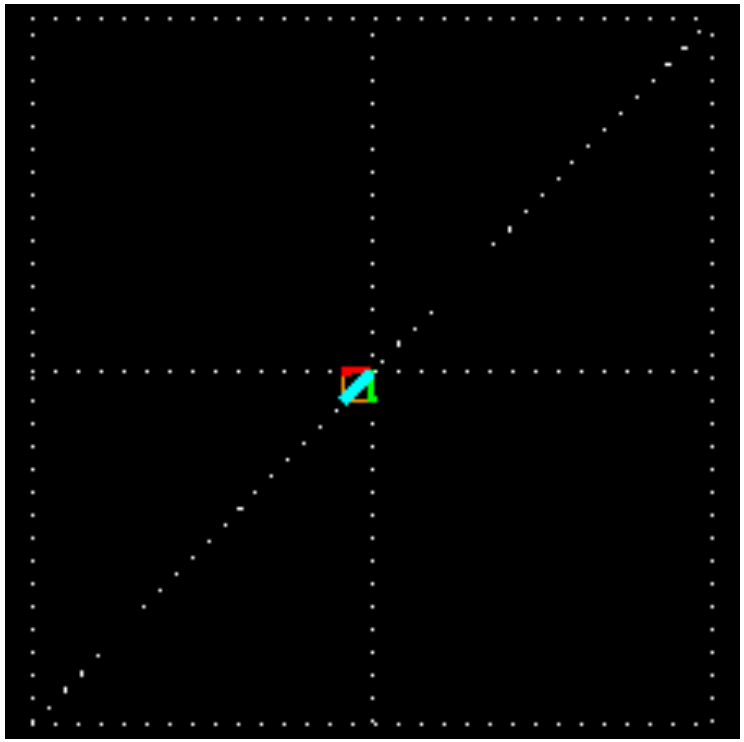
Polarizzazione rettilinea





Polarizzazione rettilinea con due componenti





In generale

$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$
$$E_z(x,t) = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \delta)$$

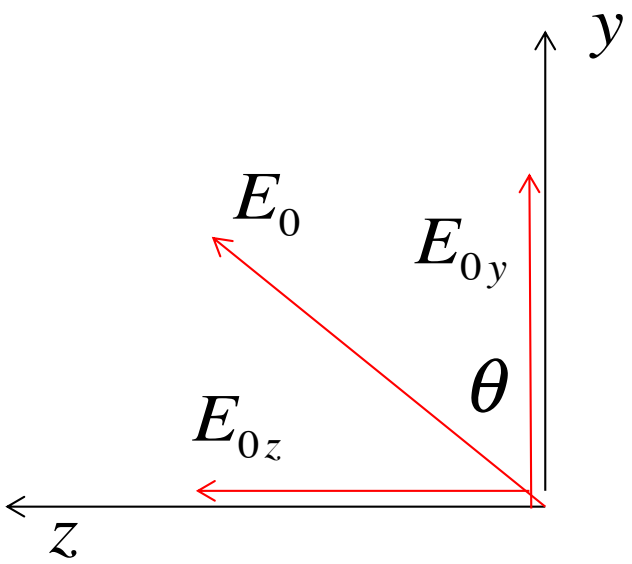
Polarizzazione rettilinea $\delta = 0$ $\delta = \pi$

$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$
$$E_z(x,t) = \pm E_{0z}\cos(kx - \omega t)$$



$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$$

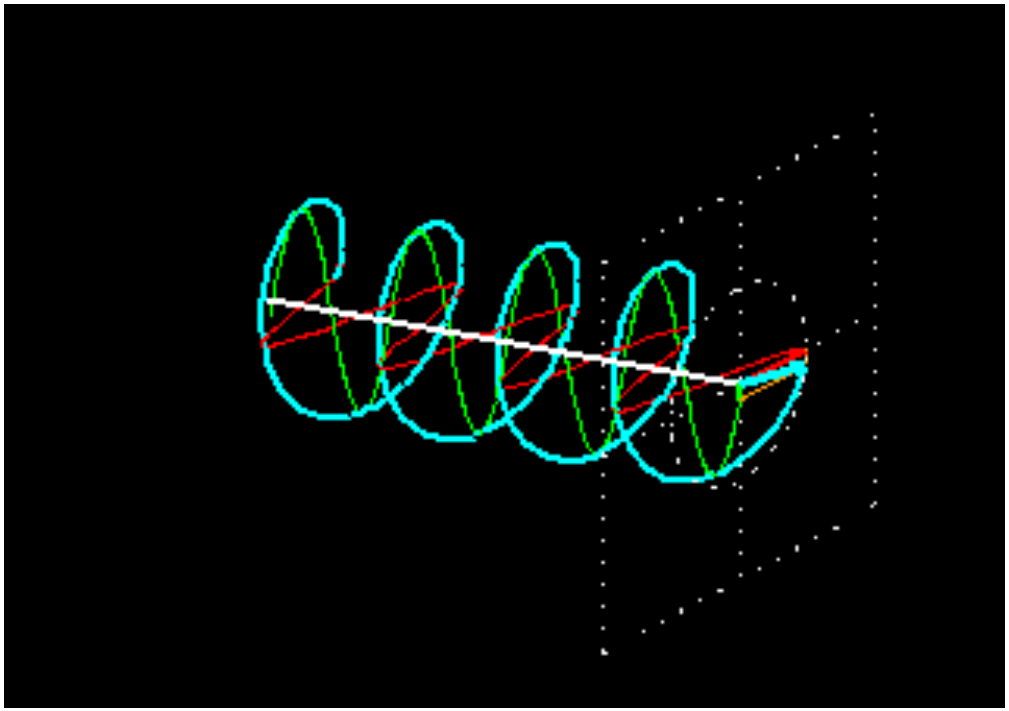
$$E_{0y} = E_0 \cos\theta \qquad E_{0z} = E_0 \sin\theta$$

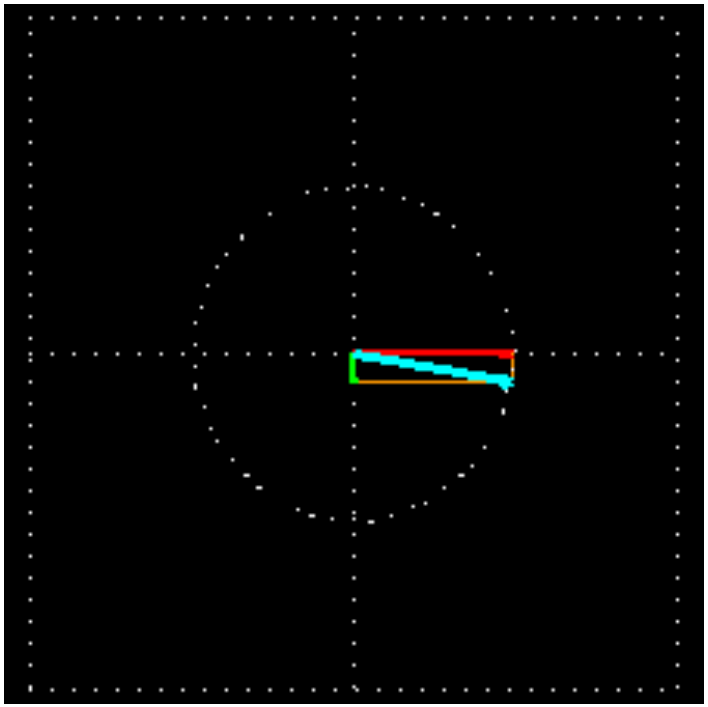


$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(E_{0y}^2 + E_{0z}^2\right)$$

$$I = \frac{E_{0y}^2}{2Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2Z_0} = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$

Polarizzazione circolare



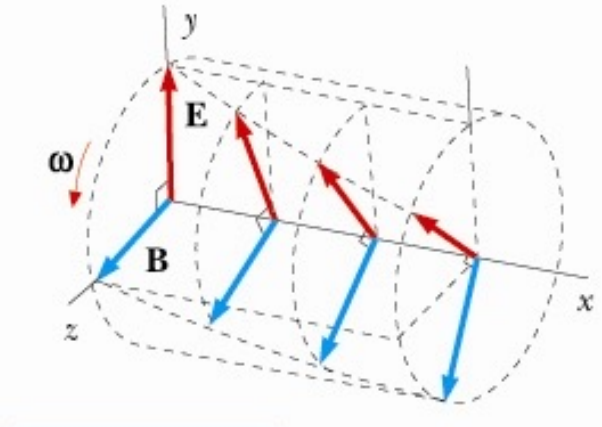


$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$
$$E_z(x,t) = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Polarizzazione circolare $\quad \delta = \frac{\pi}{2} \qquad \delta = \frac{3}{2}\pi$

$$E_y = E_{0y}\,cos(kx - \omega t) \qquad E_y^2 = E_{0y}^2\cos^2(kx - \omega t)$$
$$E_z = \pm E_{0z}\,sin(kx - \omega t) \qquad E_z^2 = E_{0z}^2\,sin^2(kx - \omega t)$$

Nell'ipotesi $E_{0y}=E_{0z}=E_0$ si ottiene l'equazione di una circonferenza di raggio E_0



$$\frac{E_y^{\,2}}{E_0^2} + \frac{E_z^{\,2}}{E_0^2} = 1$$

calcoliamo ora I: $E^2 = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$

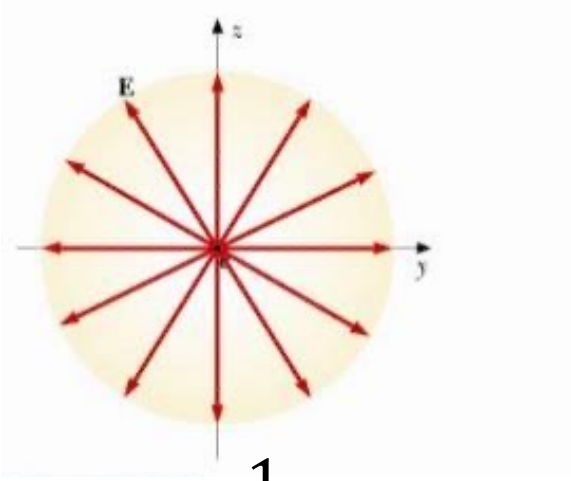
$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(E_{0y}^2 \cos^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \, sin^2(kx - \omega t)\right)$$

ricordando l'ipotesi che: $E_{oy} = E_{oz} = E_0$

otteniamo:

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 (\cos^2(kx - \omega t) + sin^2(kx - \omega t)) = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$

$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$
$$E_z(x,t) = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \delta)$$



Onde non polarizzate δ variabile

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\langle E^2\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left[\langle E_y^2\rangle + \langle E_z^2\rangle\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\langle E_y^2\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\langle E_y^2\rangle$$

$I = I_y + I_z$ Ma si ha anche $\langle E_{0y}^2\rangle = \langle E_{0z}^2\rangle$

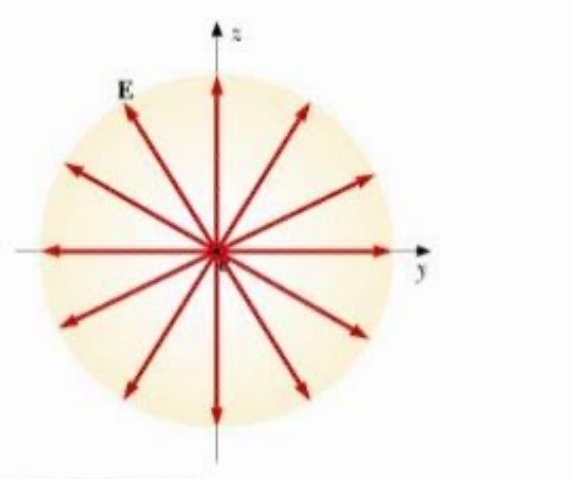
Quindi:

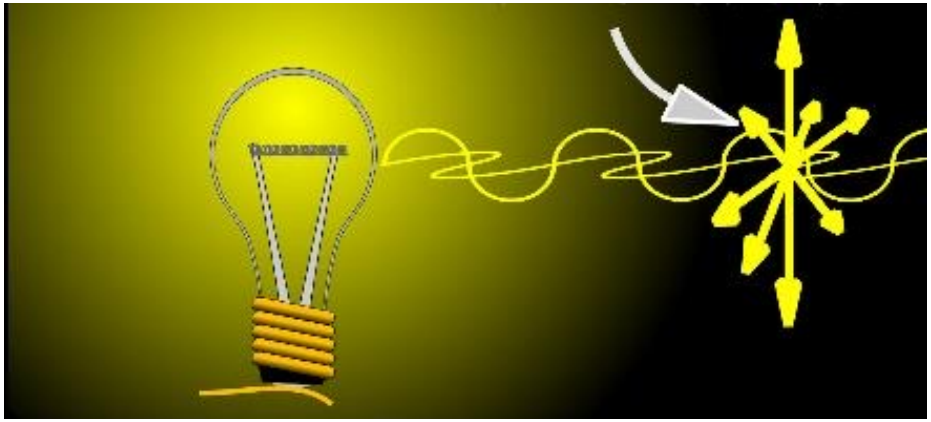
$$I = \frac{I}{2} + \frac{I}{2}$$

y z

Tutte le polarizzazioni viste valgono quando le componenti y e z del campo hanno una legge di variazione determinata rispetto alla direzione di propagazione x e al tempo t. Se la differenza di fase δ delle componenti varia nel tempo in modo casuale non si può stabilire una legge di variazione per la direzione del campo

Questo vuol dire che lo stato di polarizzazione, pur essendo definito in ogni istante e posizione, non lo è più in media nel tempo. In tal caso si dice che l'onda non è polarizzata

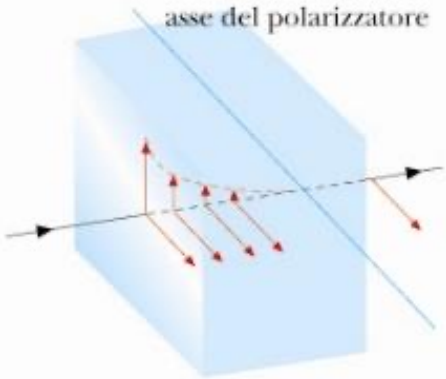


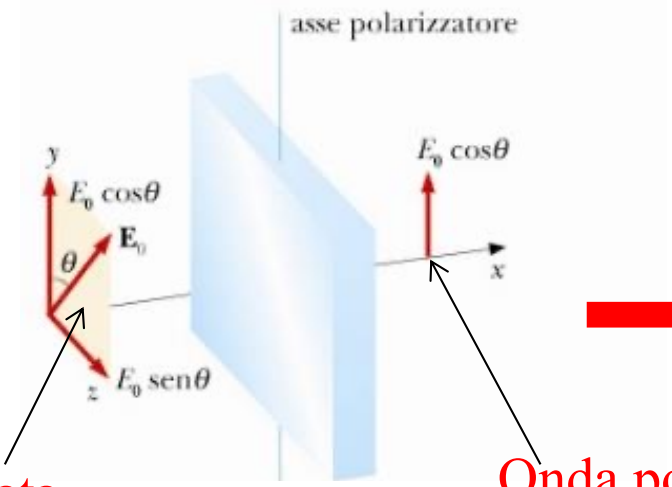


Lamine polarizzatrici

Trasmettono solo la componente lungo la direzione *dell'asse ottico*. La radiazione che emerge è polarizzata rettilinearmente lungo la direzione dell'*asse ottico*.







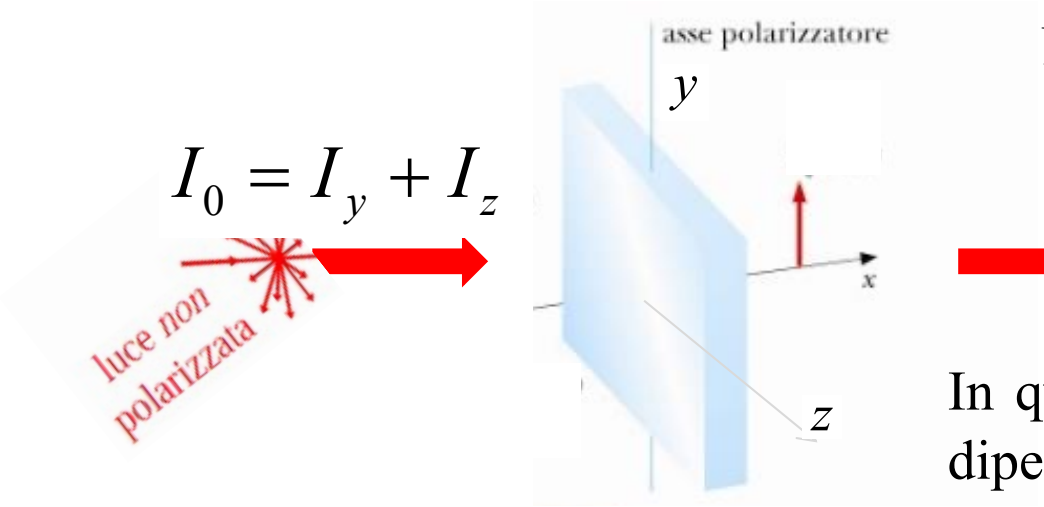
I_0 → → $I_1 = I_0 \cos^2\theta$

Legge di Malus

Onda polarizzata incidente

Onda polarizzata trasmessa

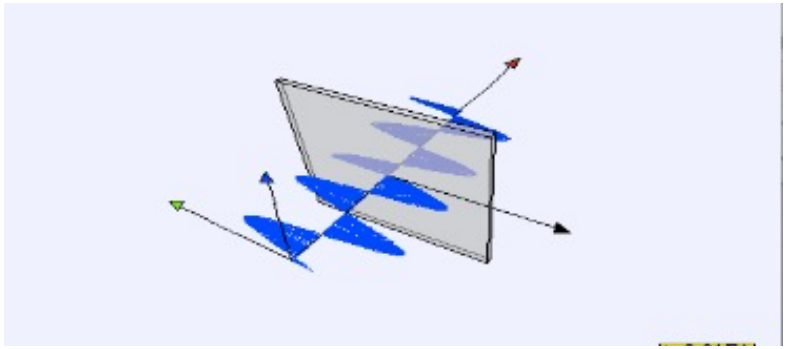
$$I_0 = I_y + I_z$$



Nel caso di radiazione non polarizzata

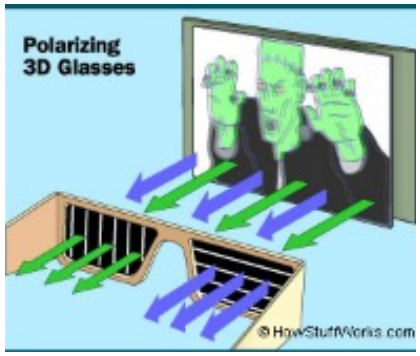
$$I_1 = I_0 / 2$$

In questo caso l'intensità trasmessa non dipende dall'angolo dell'asse ottico







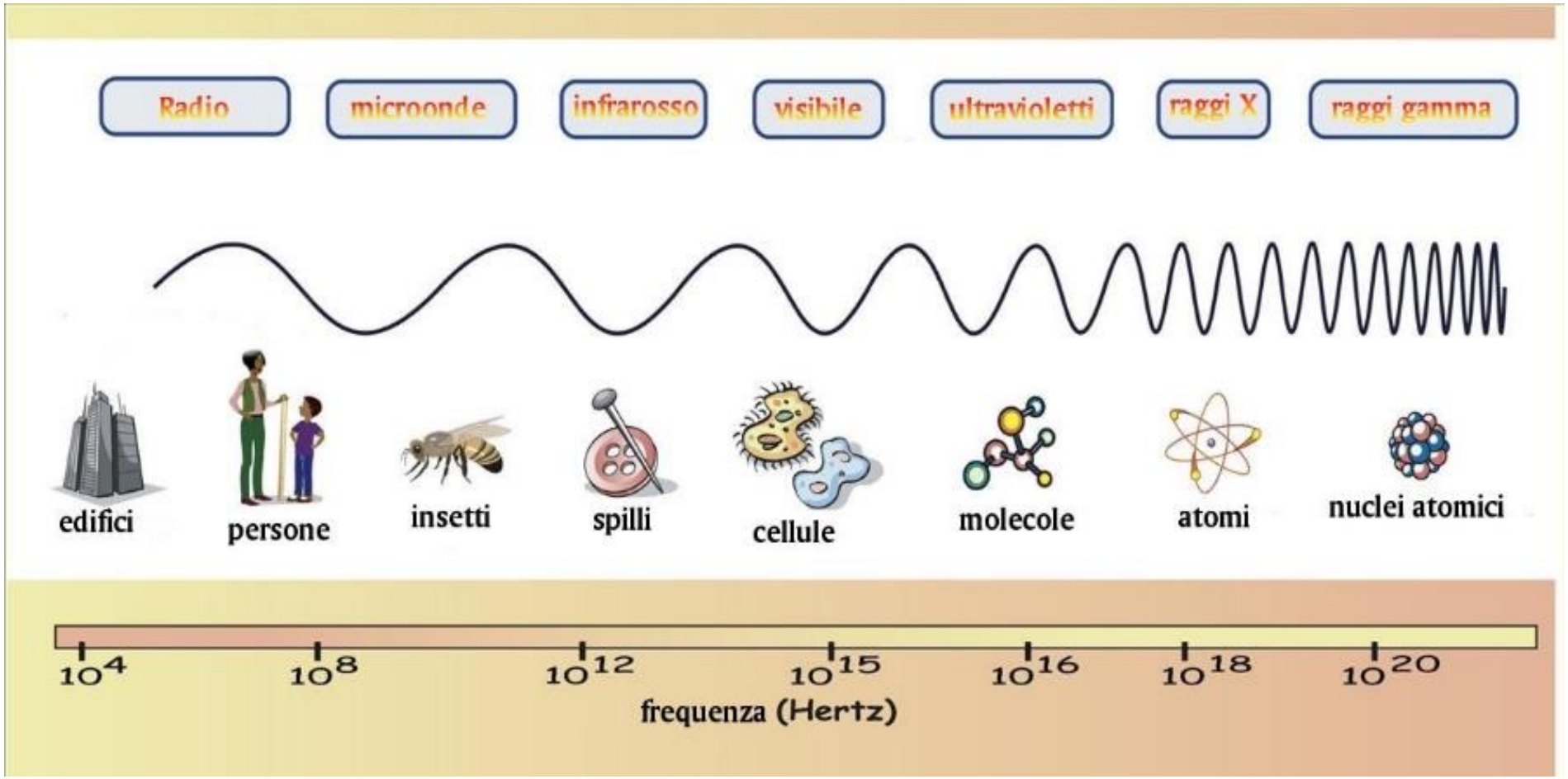


Visione 3D



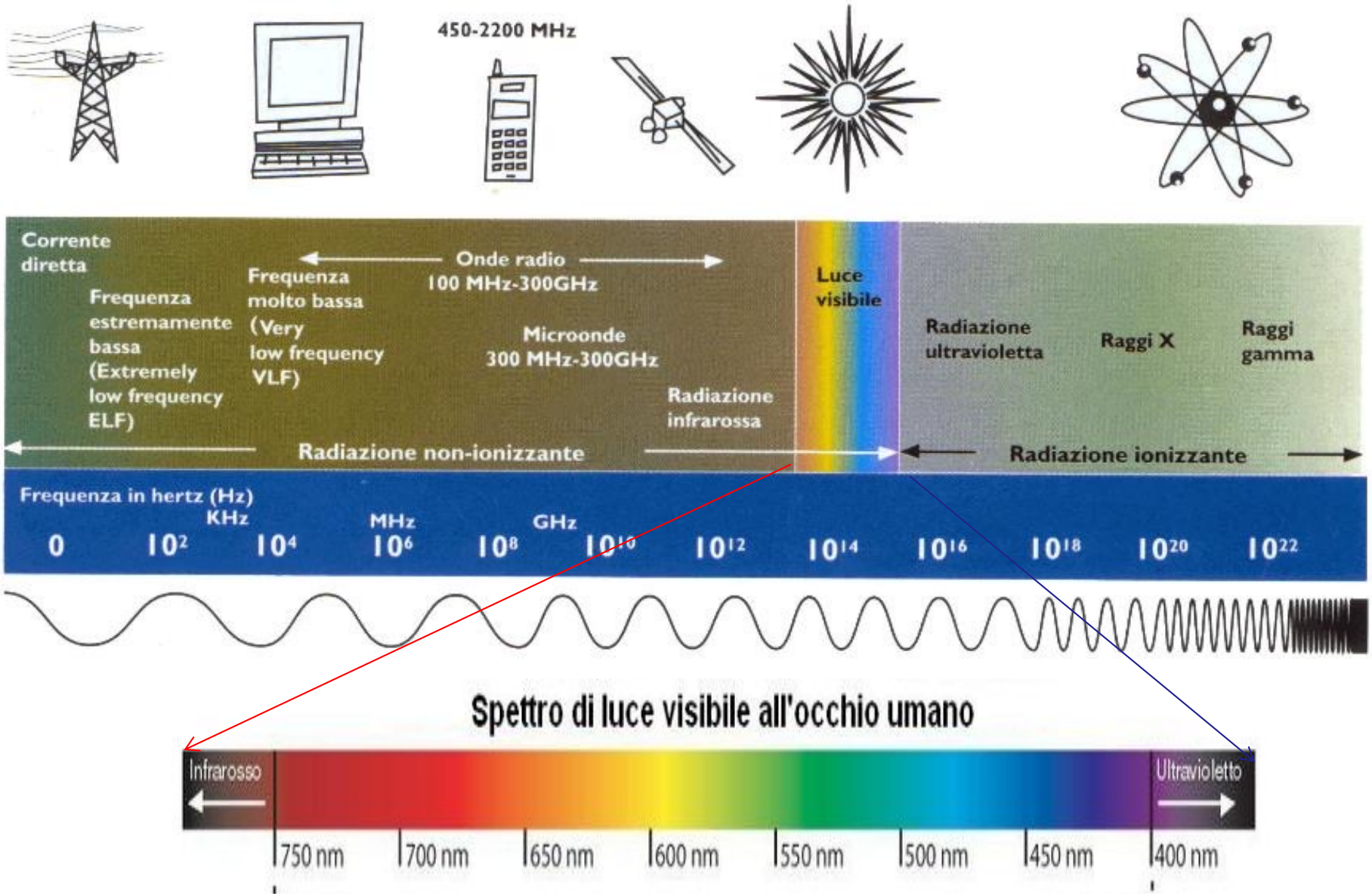
Per proiettare un film 3-D con la polarizzazione lineare, immagini parallele vengono proiettate attraverso filtri polarizzatori ortogonali (a 90° l'uno rispetto all'altro) sovrapposte su di uno speciale schermo.
In questo caso i proiettori possono ricevere il filmato da un computer dotato di due schede grafiche. Gli spettatori devono indossare degli occhiali economici che montano un paio di filtri polarizzatori ortogonali, così ciascun filtro lascia passare la luce con una polarizzazione simile e blocca la luce polarizzata ortogonalmente rispetto al filtro, cosicché ogni occhio possa vedere una delle due immagini, in tal modo viene raggiunto l'effetto 3-D

Spettro EM



Khz (Chilohertz) = 10^3 Hertz
Mhz (Megahertz) = 10^6 Hertz
Ghz (Gigahertz) = 10^9 Hertz

Spettro EM


450-2200 MHz
Corrente diretta
Frequenza estremamente bassa (Extremely low frequency ELF)
Frequenza molto bassa (Very low frequency VLF)
Onde radio
100 MHz-300GHz
Microonde
300 MHz-300GHz
Radiazione infrarossa
Luce visibile
Radiazione ultravioletta
Raggi X
Raggi gamma
Radiazione non-ionizzante
Radiazione ionizzante
Frequenza in hertz (Hz)
KHz
MHz
GHz
0
10²
10⁴
10⁶
10⁸
10¹⁰
10¹²
10¹⁴
10¹⁶
10¹⁸
10²⁰
10²²
Spettro di luce visibile all'occhio umano
Infrarosso
Ultravioletto
750 nm
700 nm
650 nm
600 nm
550 nm
500 nm
450 nm
400 nm

Spettro visibile

Colore	$\lambda\ (10^{-6}m)$	$f\ (10^{14}Hz)$
Rosso	0.780-0.622	3.85-4.82
Arancione	0.622-0.597	4.82-5.03
Giallo	0.597-0.577	5.03-5.20
Verde	0.577-0.492	5.20-6.10
Azzurro	0.492-0.455	6.10-6.59
Violetto	0.455-0.380	6.59-7.89



Spettro EM

Onde Herziane Sono prodotte con dispositivi elettronici, principalmente circuiti oscillanti e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive (onde radio, radiofrequenze)

$$3\cdot 10^{6} \geq \lambda \geq 0.3\,\mathrm{m} \qquad 10^{2} \leq f \leq 10^{9}\ \mathrm{Hz}$$

Microonde Vengono prodotte con dispositivi elettronici o da fenomeni atomici (*maser*): sono utilizzate principalmente per comunicazioni e sistemi radar

$$0.3 \geq \lambda \geq 10^{-3}\ \mathrm{m} \qquad 10^{9} \leq f \leq 3\cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}$$

Infrarosso Questa regione viene suddivisa a sua volta in tre parti: l'*estremo infrarosso* da 10^{-3} a $3\cdot 10^{-5}$ m, il *medio infrarosso* da $3\cdot 10^{-5}$ a $3\cdot 10^{-6}$ m e, il *vicino infrarosso* da $3\cdot 10^{-6}$ a $0.78\cdot 10^{-6}$ m, soglia del visibile.

$$10^{-3} \geq \lambda \geq 0.78\ \mathrm{m} \qquad 3\cdot 10^{11} \leq f \leq 3.8\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

Luce visibile La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas o da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi

$$0.78\cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \qquad 3.8\cdot 10^{14} \leq f \leq 7.9\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

Ultravioletto

La radiazione ultravioletta è emessa da atomi eccitati, in particolare anche con il meccanismo del laser e da particelle cariche accelerate (*radiazione di sincrotrone*).

$$0.38\cdot10^{-6} \geq \lambda \geq 6\cdot10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad 7.9\cdot10^{14} \leq f \leq 5\cdot10^{17}\,\mathrm{Hz}$$

Raggi X

Le onde elettromagnetiche denominate raggi *X* vengono prodotte con due meccanismi differenti, il più importante consiste nel frenamento di elettroni accelerati da d.d.p. al massimo dell'ordine di 100kV.

$$6\cdot10^{-10} \geq \lambda \geq 6\cdot10^{-12}\,\mathrm{m} \qquad 5\cdot10^{17} \leq f \leq 5\cdot10^{19}\,\mathrm{Hz}$$

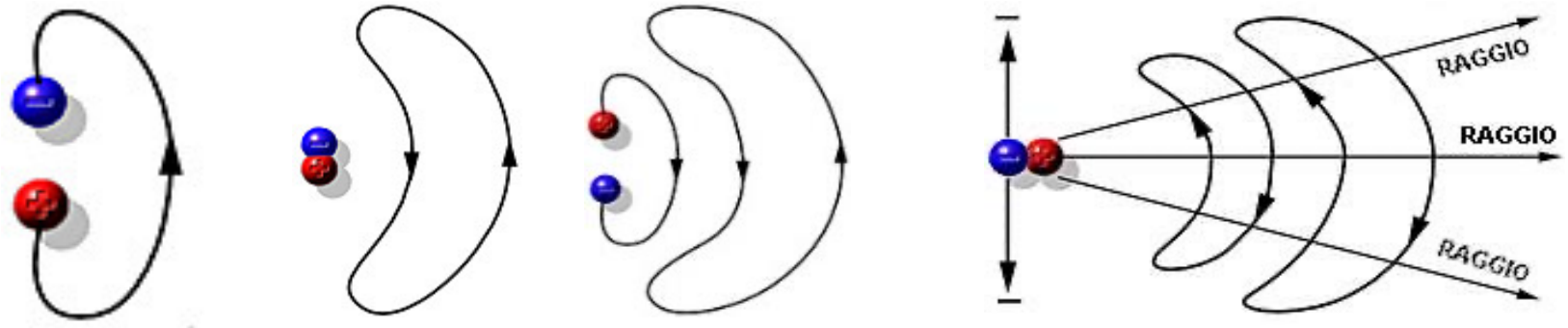
Raggi γ

I raggi γ sono prodotti in processi nucleari, quali decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei, nelle reazioni e nei decadimenti di particelle subnucleari.

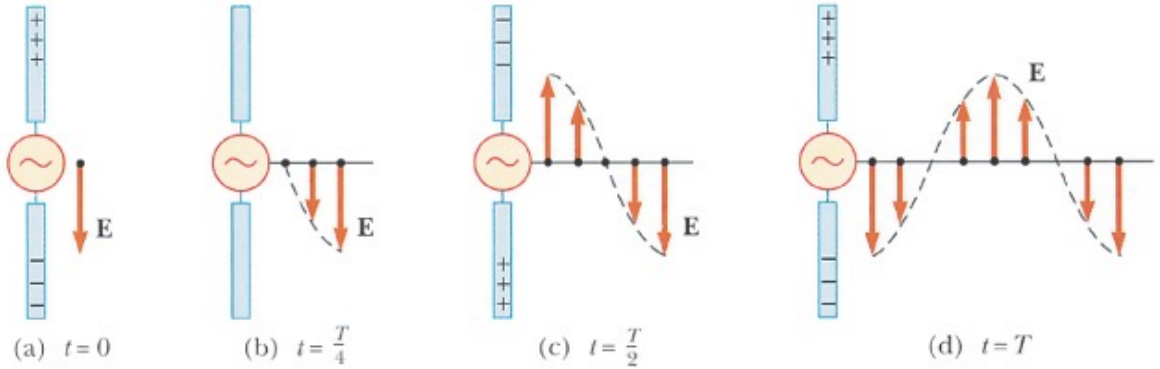
$$\lambda \leq 10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad f \geq 3\cdot10^{18}\,\mathrm{Hz}$$

Produzione di onde EM- Dipoli

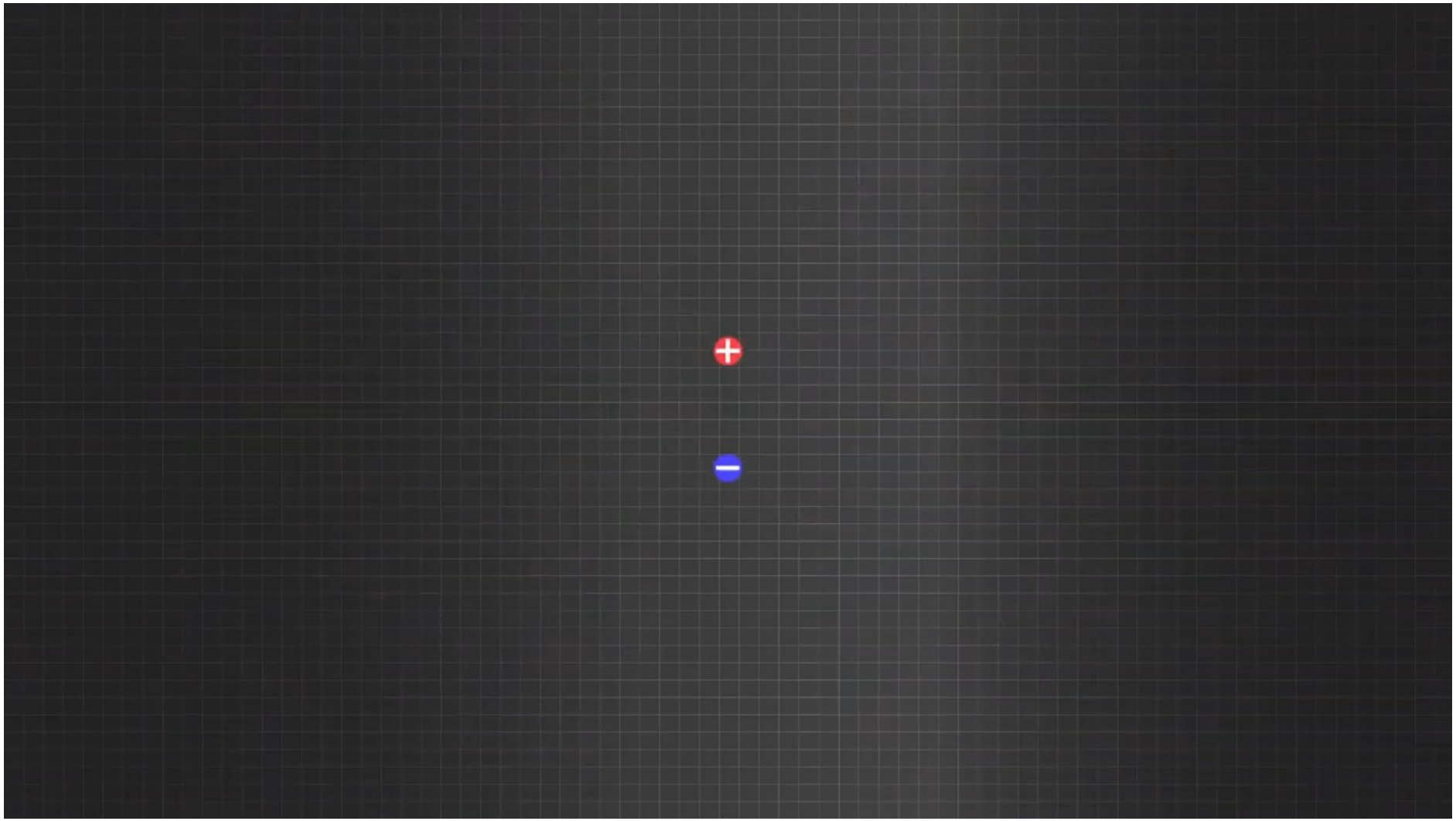
Se si fa oscillare una carica negativa vicino ad una carica positiva si produce una perturbazione delle linee di campo che si propaga nello spazio



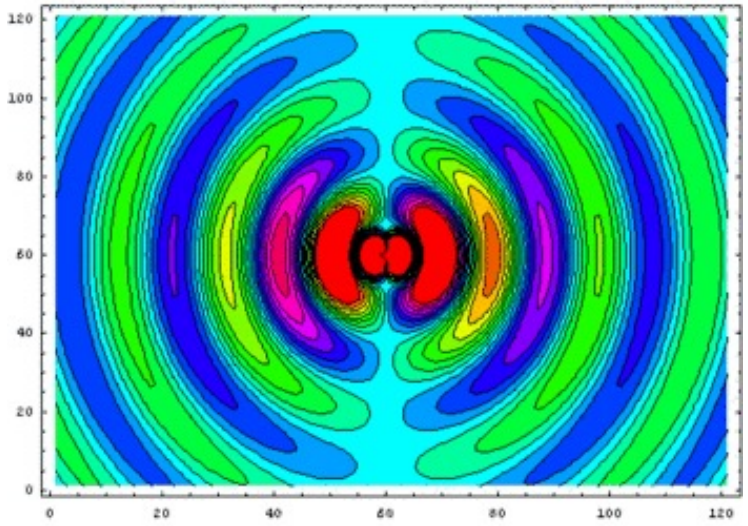
Per produrre un campo elettrico oscillante si usa un dipolo oscillante, cioè una "antenna"

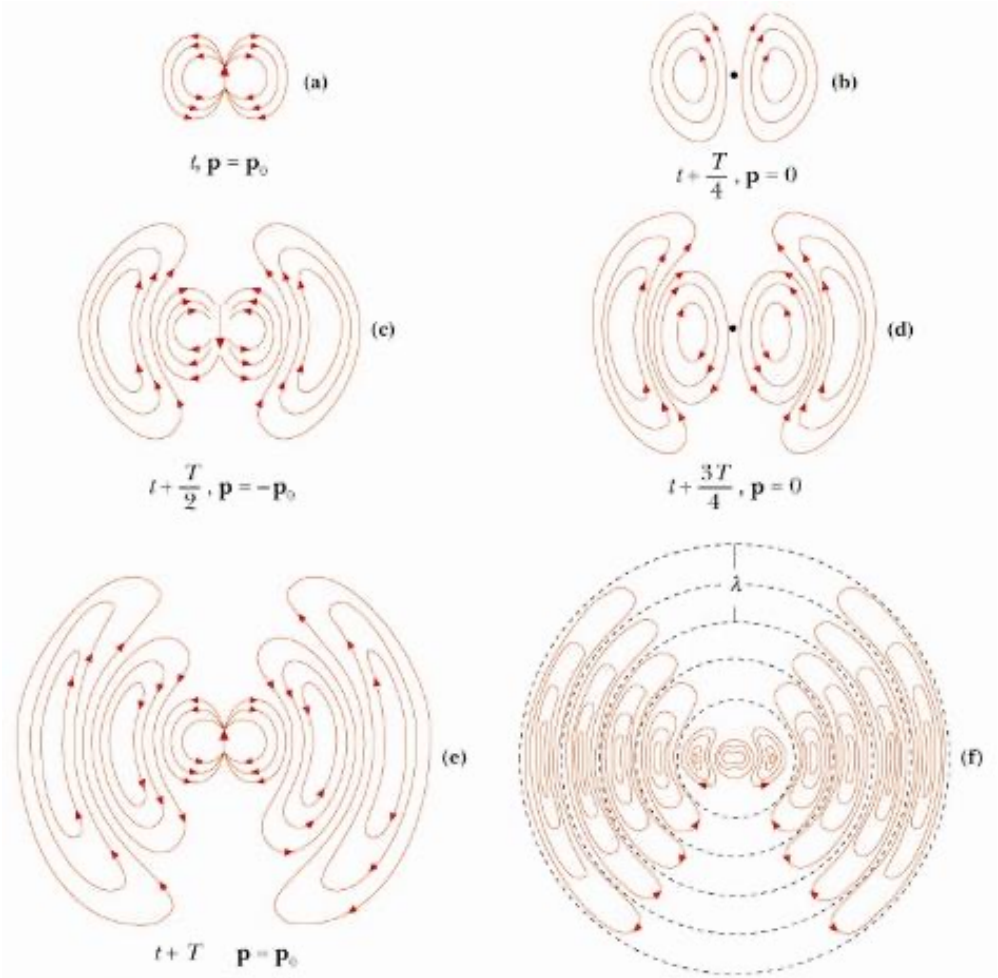


Produzione di onde EM- Dipoli



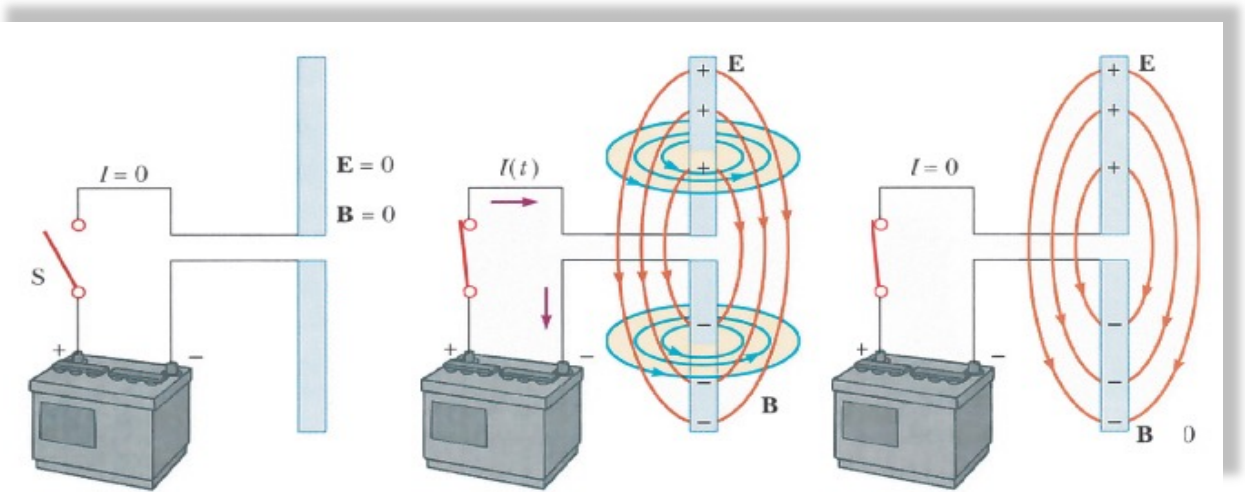
Andamenti delle linee di campo elettrico generate dal dipolo elettrico oscillante

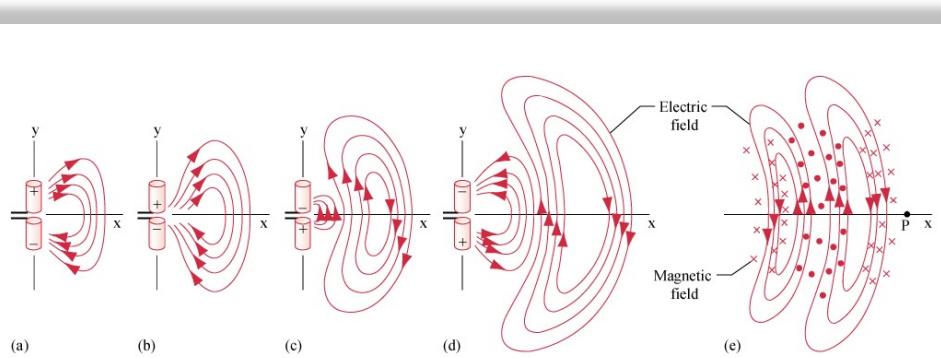




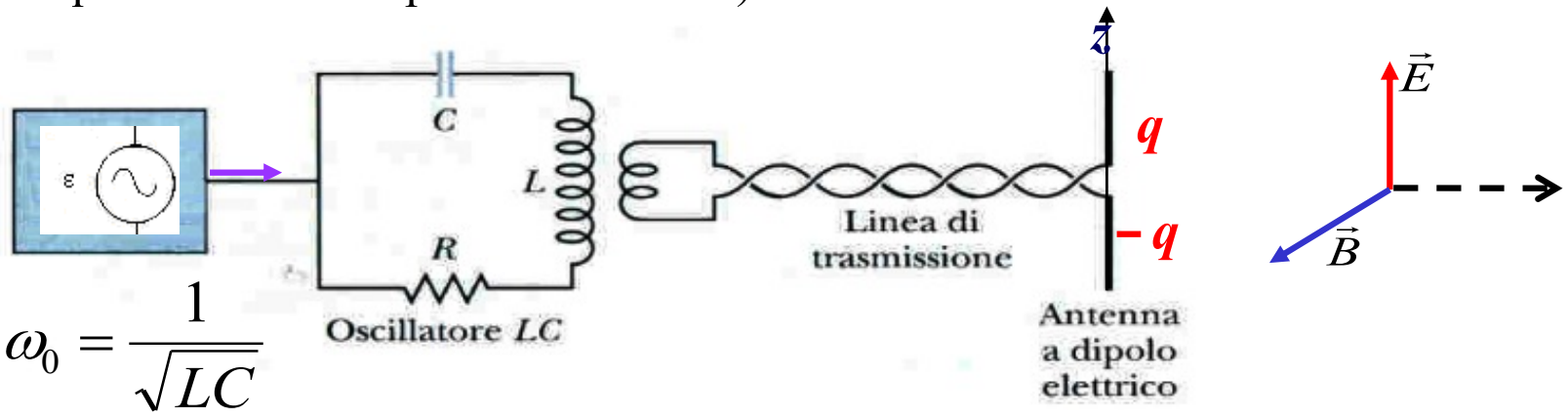
Produzione di onde EM- Dipoli

E' presente anche il campo magnetico (legge di Ampere-Maxwell). Il campo magnetico si genera perché un dipolo elettrico oscillante è equivalente ad una corrente lineare oscillante,ed una corrente elettrica produce sempre un campo magnetico.



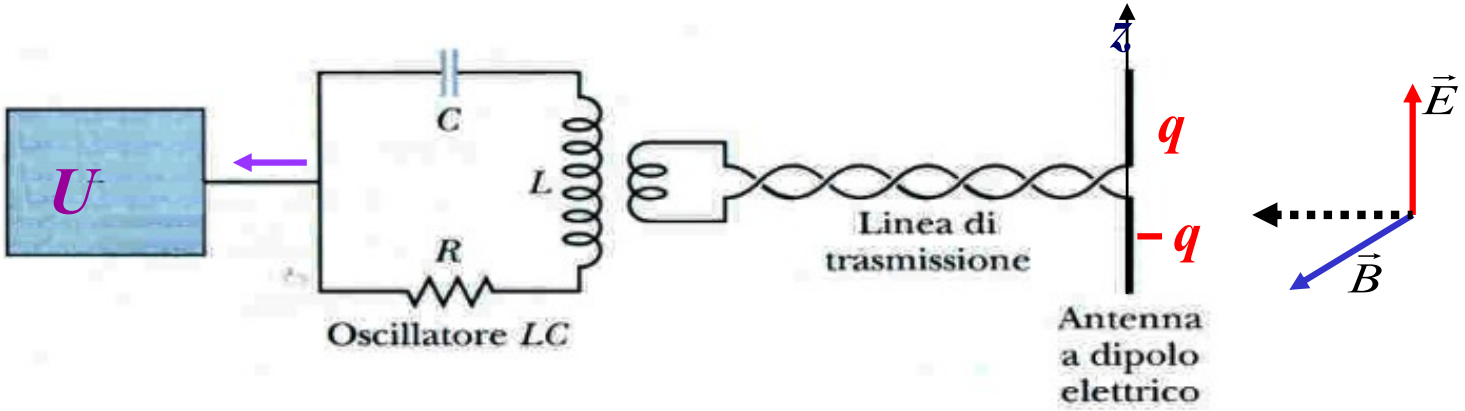


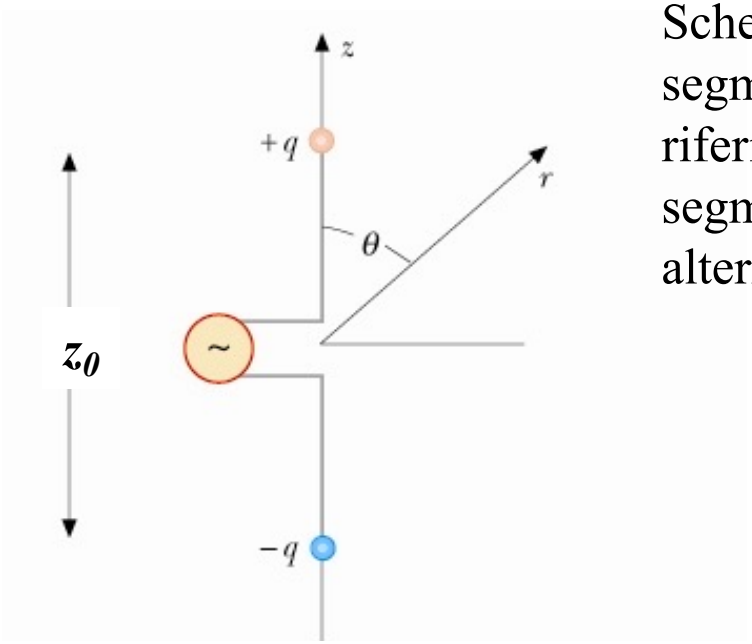
Per generare un'onda e.m. si fa oscillare la carica in un dipolo utilizzando un circuito RLC (schema equivalente del dispositivo di Hertz)



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Per ricevere un'onda e.m. si fa il procedimento inverso





Schematizziamo il dipolo elettrico oscillante come un segmento di lunghezza z_0, posto parallelo all'asse di riferimento z. La carica è concentrata agli estremi del segmento ($+q$ e $-q$) e con un opportuno generatore di corrente alternata si fa variare la carica sinusoidalmente:

$$q = q_o \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega q_o \cos(\omega t) = i_o \cos(\omega t)$$

Il momento di dipolo è

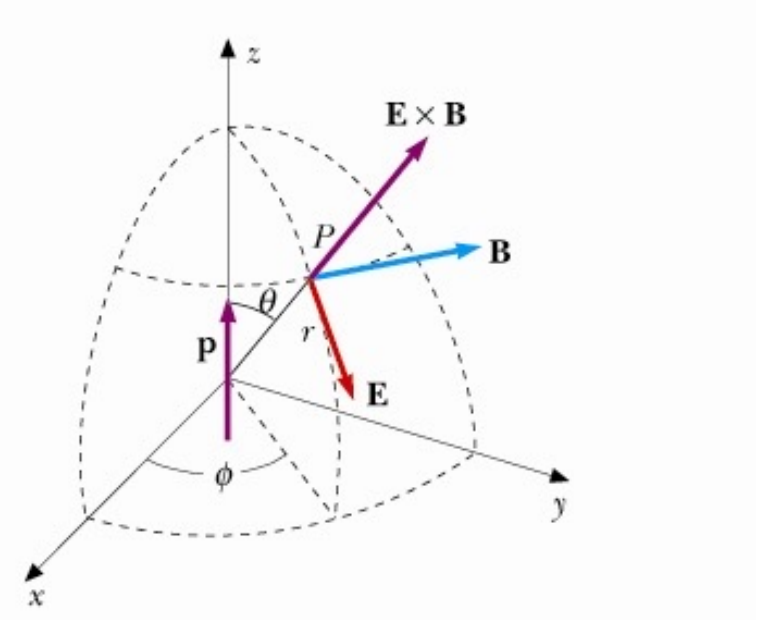
$$\vec{p} = q\vec{z}_0 = qz_0\hat{u}_z = q_o z_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{u}_z = p_o \,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{u}_z$$

$$p_0 = q_o z_0$$

Produzione di onde EM- Dipoli

Si dimostra che a grandi distanze dal dipolo $r >> \lambda >> z$ il modulo del campo elettrico risulterà:

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^2}{r}\sin(kr - \omega t)$$



-Classica dipendenza *1/r*, tipica dell'onda sferica

-Componente radiale del campo E_r è nulla

- I campi dipendono anche dall'angolo θ e in particolare sono nulli per θ=0 e θ=π, cioè lungo l'asse del dipolo.

Si deve notare che il campo **E** che si trova nel caso di un dipolo oscillante è diverso da quello trovato nel caso di un dipolo *non oscillante*. Infatti nel caso del campo generato da un dipolo *non oscillante* si è trovato (in coordinate polari):

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = \frac{p\,sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Si distinguono infatti tre diverse zone:

1) la zona di ***campo vicino*** (statica), nella quale $z \ll r \ll \lambda$;
2) la zona di ***campo intermedio*** (di induzione), nella quale $z \ll r \approx \lambda$;
3) la zona di ***campo lontano*** (di radiazione) nella quale $z \ll \lambda \ll r$.

Le soluzioni nella zona di ***campo vicino*** sono molto simili a quelle che si sono ottenute per un dipolo non oscillante:

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} sen(\omega t) \qquad E_\theta = \frac{p\,sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cos(\omega t)$$



Nella zona di ***campo lontano***, le soluzioni delle equazioni di Maxwell cambiano e non si ha più una componente lungo la direzione di propagazione, $E_r=0$, ma solo una componente trasversa. Inoltre la dipendenza da r cambia e invece che da $1/r^3$ diventa $1/r$, tipica di un'onda sferica dando la soluzione già anticipata:

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^2}{r}\sin(kr-\omega t)$$

n.b. per una trattazione completa si può consultare il libro: John David Jackson, *Classical Electrodynamics (third edition),* Wiley [Cap.9]

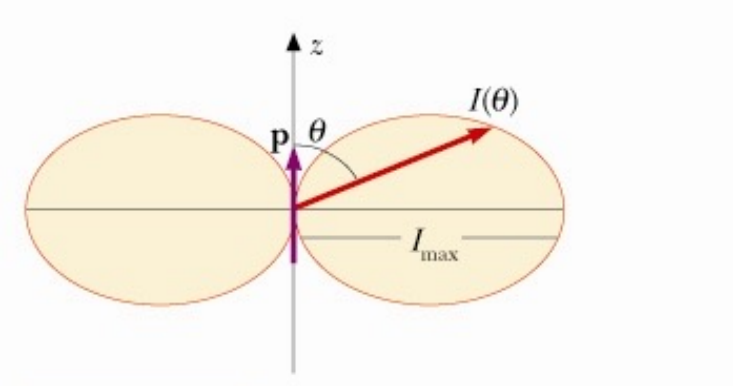
Intensità

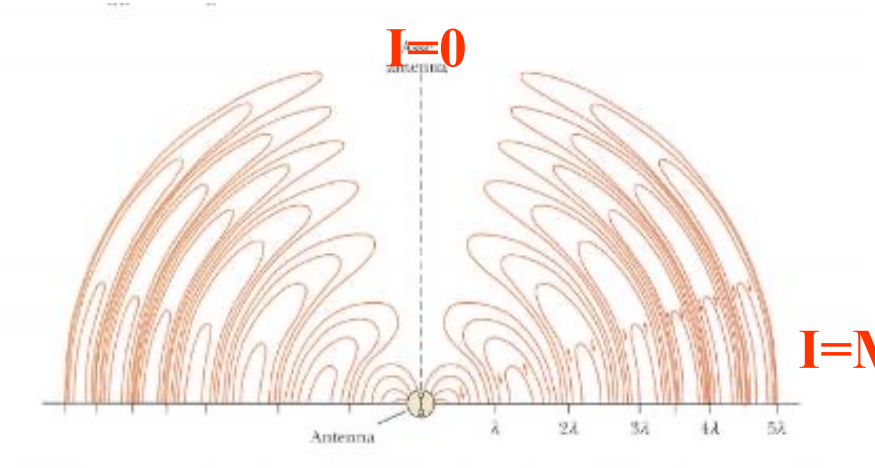
$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^{\,2}$$

$$I_0$$

$$I = \frac{p_0^{\,2}\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2}\sin^2\theta$$

Dipende da $1/r^2$ e da $\sin^2\theta$. Quindi l'intensità massima sarà per $\theta=\pi/2$ ovvero si avrà lungo il piano equatoriale, dove vale:



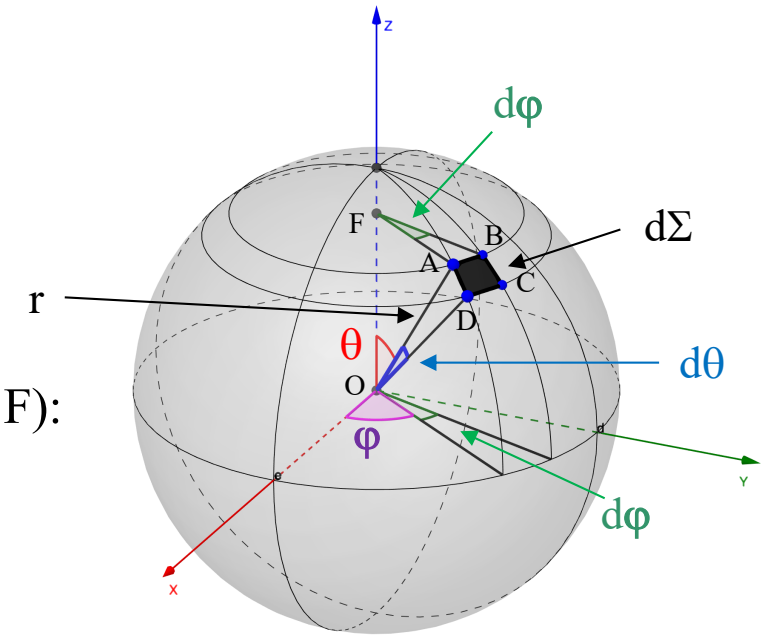


I=Max

Potenza

La ***potenza*** complessiva emessa dal dipolo:

$$P = \int I(r,\theta)d\Sigma$$



Il triangolo OFA è rettangolo (angolo retto in F):

$$\mathrm{AF} = \mathrm{r}\sin\theta \dashrightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{r}\sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{AD} = \mathrm{r} \cdot \mathrm{d}\theta$$

L'elemento di superficie infinitesima:

$$\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{AB} \cdot AD = (\mathrm{r}\sin\theta\mathrm{d}\varphi)(\mathrm{r}\mathrm{d}\theta) = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Potenza $P = \int I(r,\theta)\, d\Sigma$

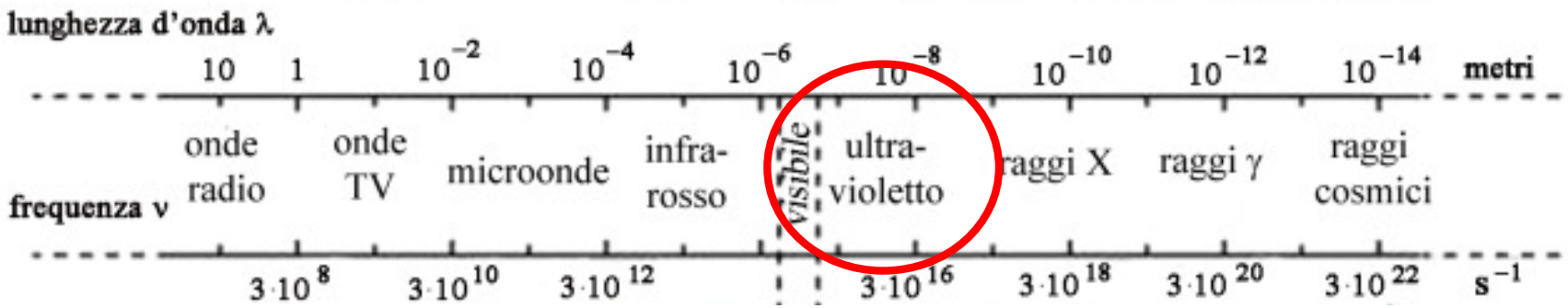
$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{{p_0}^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta = \frac{{p_0}^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = -\int_1^{-1} (1-\cos^2\theta) d\cos\theta = \frac{4}{3}$$

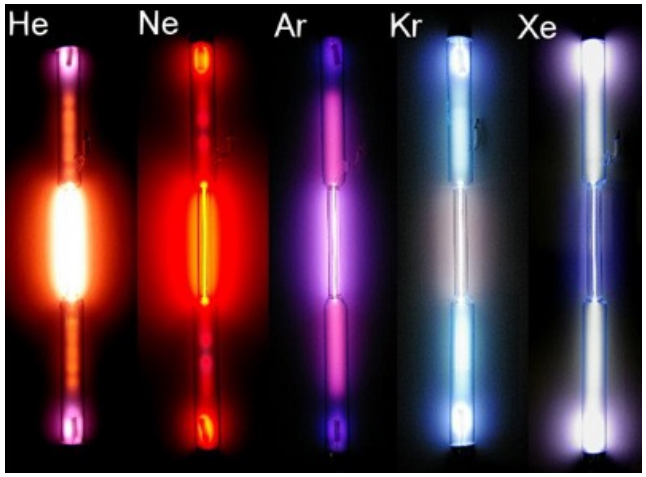
$$P = \frac{8\pi}{3} I_0 \qquad P = \frac{{p_0}^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Quindi fissato il momento di dipolo p_0 , la potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione, ovvero della frequenza

Produzione di onde EM

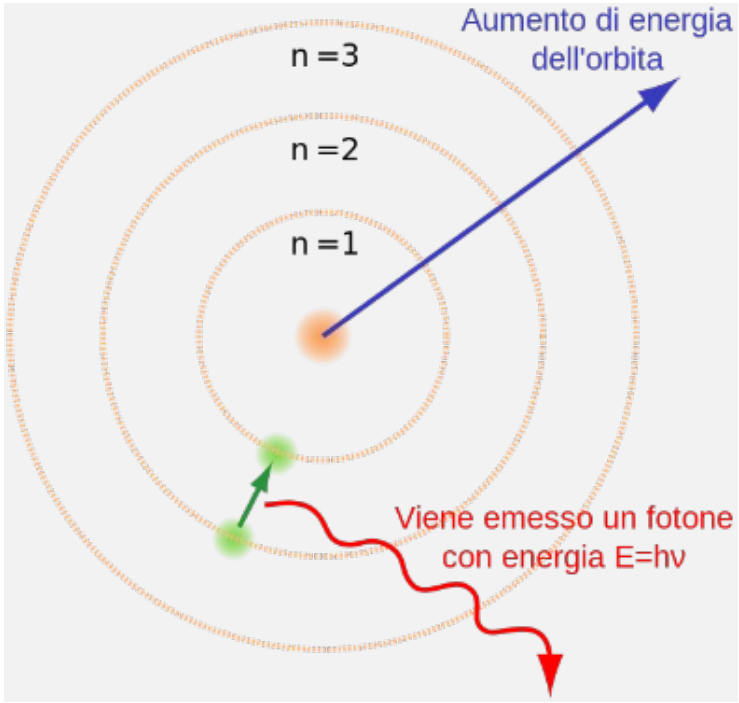


Gas eccitati con alta tensione emettono radiazione luminosa

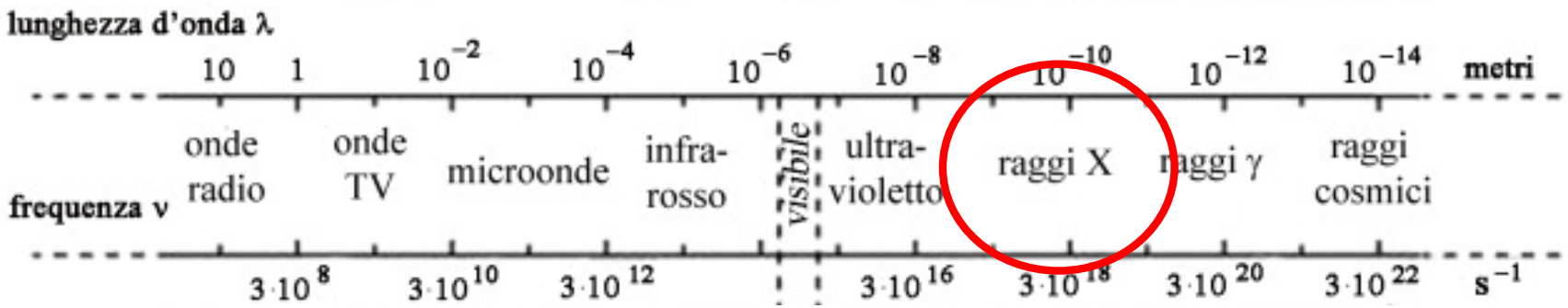


Onde luminose

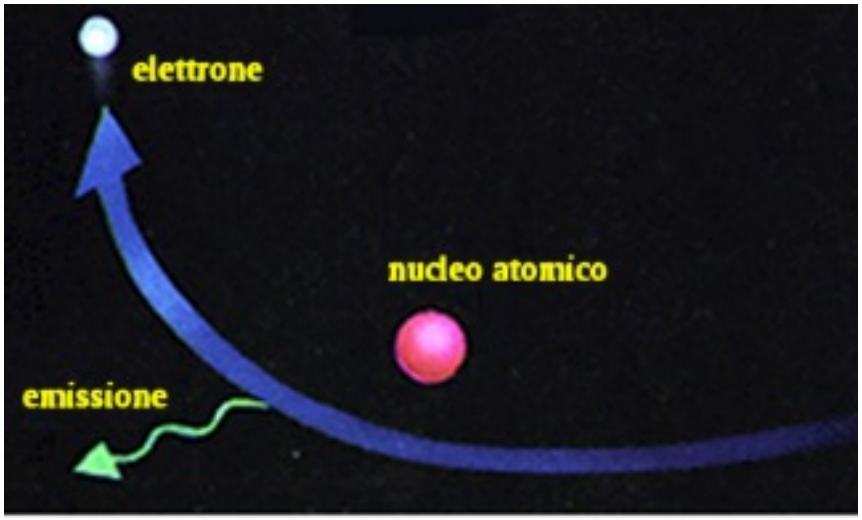
Processi di modifica dell'atomo

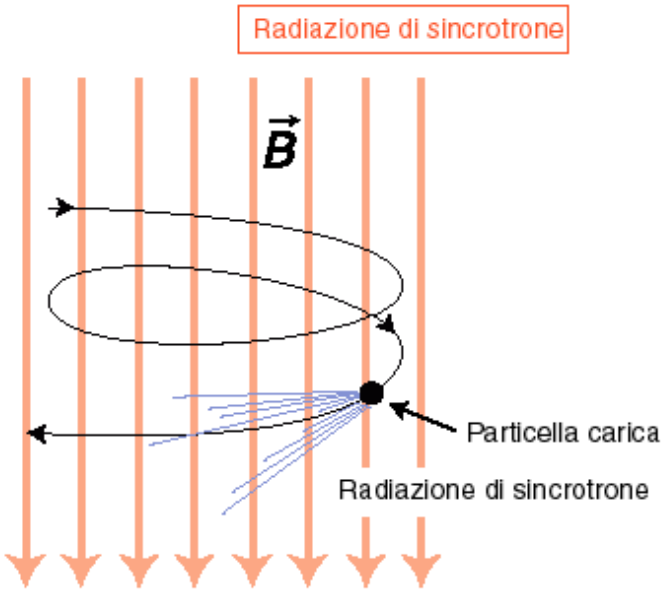


Produzione di onde EM



Onde EM da cariche accelerate





Radiazione emessa dal dipolo oscillante come carica accelerata:

$$z(t) = z_0 \sin(\omega t) \longrightarrow p(t) = qz_0 \sin(\omega t) = p_o \, sin(\omega t)$$

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t \qquad < a^2 >= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \omega^4 {z_0}^2 \sin^2 \omega t = \frac{\omega^4 {z_0}^2}{2}$$

Massimo è: $p_o = qz_0 \longrightarrow p_o^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2q^2 < a^2 >$

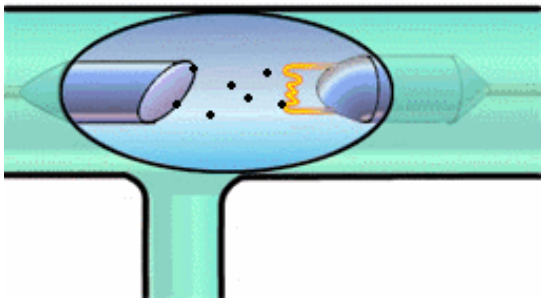
$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad < a^2 >= \frac{z_0^2 \omega^4}{2}$$

$$P = \frac{q^2 < a^2 >}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Formula di Larmor

Raggi X

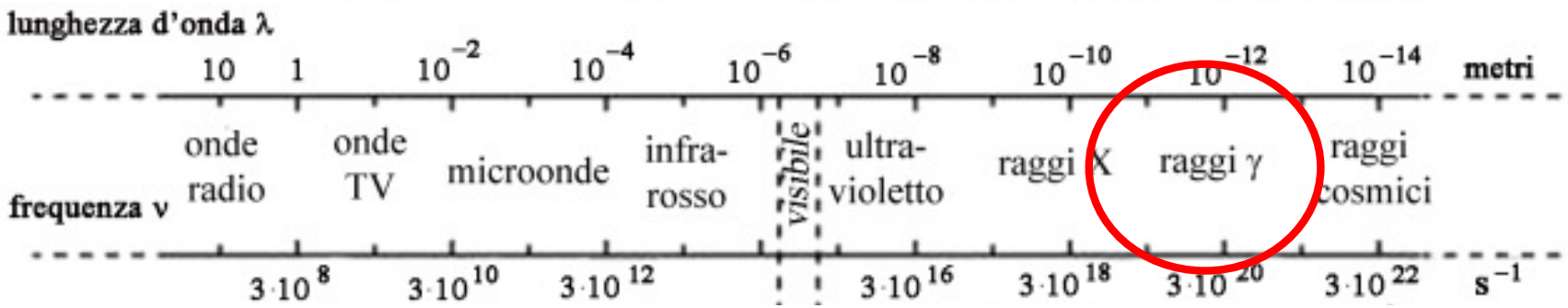
Tubo di Coolidge



In un tubo in cui è fatto il vuoto e in cui sono posti due elettrodi alimentati da una d.d.p. Un elettrodo è portato ad alta temperatura ed emette elettroni. L'altro elettrodo (il catodo, quello a potenziale positivo) si occupa di catturare tali elettroni.

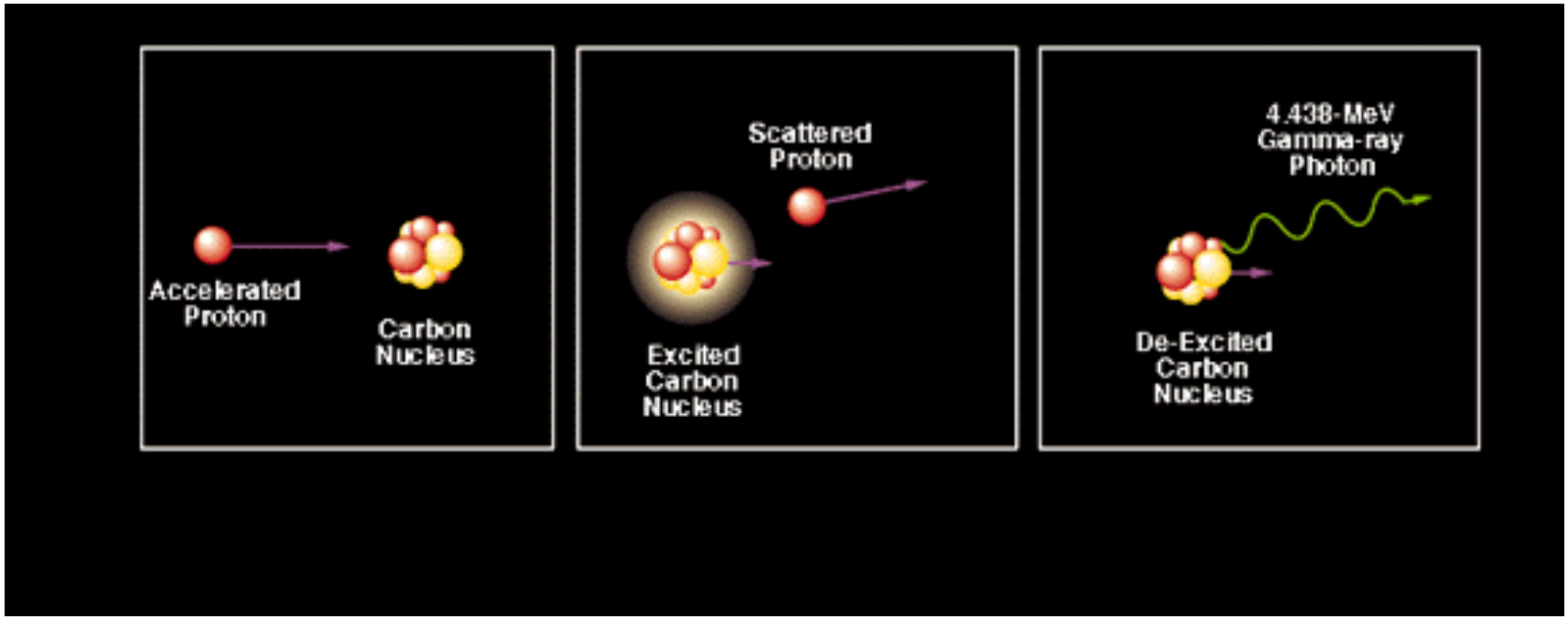
Gli elettroni catturati dall'elettrodo vengono bruscamente decelerati e quindi si ha la produzione di un'onda e.m. secondo la formula di Larmor. Durante la decelerazione si produce la *radiazione di frenamento* o più comunemente chiamata *bremsstrahlung*

Produzione di onde EM



Raggi gamma

Processi di modifca del nucleo atomico



Appendice: Doppio prodotto vettoriale

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{pmatrix}\hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{pmatrix}=\hat{u}_x\left(B_yC_z-B_zC_y\right)+\hat{u}_y\left(B_zC_x-B_xC_z\right)+$$

$$+\hat{u}_z\left(B_xC_y-B_yC_x\right)$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}\hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{pmatrix}$$

$$=\hat{u}_x\left[A_y\left(B_xC_y-B_yC_x\right)-A_z\left(B_zC_x-B_xC_z\right)\right]+$$

$$+\hat{u}_y\left[A_z\left(B_yC_z-B_zC_y\right)-A_x\left(B_xC_y-B_yC_x\right)\right]+$$

$$+\hat{u}_z\left[A_x\left(B_zC_x-B_xC_z\right)-A_y\left(B_yC_z-B_zC_y\right)\right]$$

Appendice: Doppio prodotto vettoriale

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \hat{u}_x B_x(A_y C_y) - \hat{u}_x C_x(A_y B_y) - \hat{u}_x C_x(A_z B_z) + \hat{u}_x B_x(A_z C_z) +$$

$$+ \hat{u}_y B_y(A_z C_z) - \hat{u}_y C_y(A_z B_z) - \hat{u}_y C_y(A_x B_x) + \hat{u}_y B_y(A_x C_x) +$$

$$+ \hat{u}_z B_z(A_x C_x) - \hat{u}_z C_z(A_x B_x) - \hat{u}_z C_z(A_y B_y) + \hat{u}_z B_z(A_y C_y) =$$

$$= \hat{u}_x B_x(A_y C_y + A_z C_z) + \hat{u}_y B_y(A_x C_x + A_z C_z) + \hat{u}_z B_z(A_x C_x + A_y C_y) -$$

$$- \left[\hat{u}_x C_x(A_y B_y + A_z B_z) + \hat{u}_y C_y(A_z B_z + A_x B_x) + \hat{u}_z C_z(A_x B_x + A_y B_y)\right]$$

Appendice: Doppio prodotto vettoriale

Osservando che

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \left(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z\right) \begin{cases} A_yC_y + A_zC_z = \vec{A}\cdot\vec{C} - A_xC_x \\ A_xC_x + A_zC_z = \vec{A}\cdot\vec{C} - A_yC_y \\ A_yC_y + A_xC_x = \vec{A}\cdot\vec{C} - A_zC_z \end{cases}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) \begin{cases} A_yB_y + A_zB_z = \vec{A}\cdot\vec{B} - A_xB_x \\ A_xB_x + A_zB_z = \vec{A}\cdot\vec{B} - A_yB_y \\ A_yB_y + A_xB_x = \vec{A}\cdot\vec{B} - A_zB_z \end{cases}$$

Appendice: Doppio prodotto vettoriale

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \hat{u}_x B_x(A_y C_y + A_z C_z) + \hat{u}_y B_y(A_x C_x + A_z C_z) + \hat{u}_z B_z(A_x C_x + A_y C_y) -$$

$$- \left[\hat{u}_x C_x(A_y B_y + A_z B_z) + \hat{u}_y C_y(A_z B_z + A_x B_x) + \hat{u}_z C_z(A_x B_x + A_y B_y)\right] =$$

$$= \hat{u}_x B_x(\vec{A}\cdot\vec{C} - A_x C_x) + \hat{u}_y B_y(\vec{A}\cdot\vec{C} - A_y C_y) + \hat{u}_z B_z(\vec{A}\cdot\vec{C} - A_z C_z) -$$

$$- \left[\hat{u}_x C_x(\vec{A}\cdot\vec{B} - A_x B_x) + \hat{u}_y C_y(\vec{A}\cdot\vec{B} - A_y B_y) + \hat{u}_z C_z(\vec{A}\cdot\vec{B} - A_z B_z)\right] =$$

$$= (\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z)(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \hat{u}_x A_x B_x C_x - \hat{u}_y A_y B_y C_y - \hat{u}_z A_z B_z C_z$$

$$- (\hat{u}_x C_x + \hat{u}_y C_y + \hat{u}_z C_z)(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \hat{u}_x A_x B_x C_x + \hat{u}_y A_y B_y C_y + \hat{u}_z A_z B_z C_z$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

Appendice: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$\vec{\nabla} = \vec{A}$; $\vec{\nabla} = \vec{B}$ e $\vec{E} = \vec{C}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Appendice: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_x\hat{u}_x + E_y\hat{u}_y + E_z\hat{u}_z\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(E_x\hat{u}_x + E_y\hat{u}_y + E_z\hat{u}_z\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(E_x\hat{u}_x + E_y\hat{u}_y + E_z\hat{u}_z\right)$$

Appendice: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$

$$
\begin{aligned}
&(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} \\
&= \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\hat{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\hat{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\hat{u}_z\right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\hat{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}\hat{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\hat{u}_z\right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\hat{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\hat{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\hat{u}_z\right)
\end{aligned}
$$

Appendice: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)\hat{u}_x$$
$$+\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\hat{u}_y$$
$$+\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\hat{u}_z$$
$$= (\nabla^2 E_x)\hat{u}_x + (\nabla^2 E_y)\hat{u}_y + (\nabla^2 E_z)\hat{u}_z$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\nabla}^2\vec{E} = (\nabla^2 E_x, \nabla^2 E_y, \nabla^2 E_z)$$