LEZIONE 07–08/30

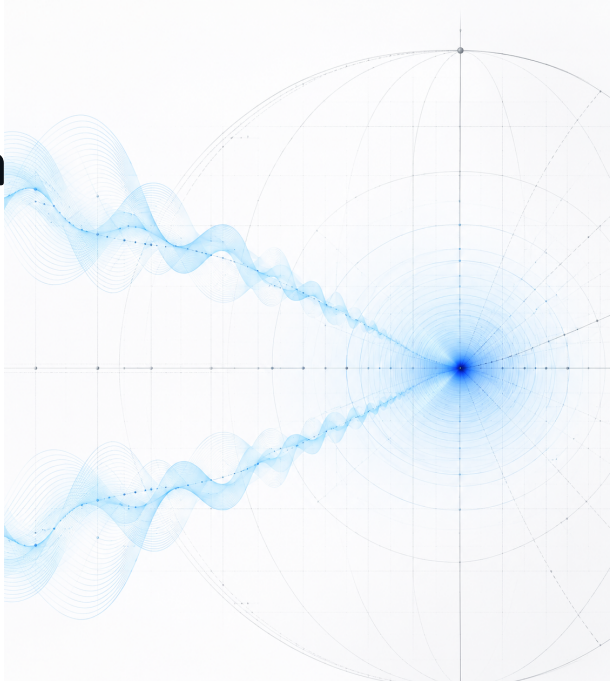
Il qubit e la sfera di Bloch

Stato, misura e rappresentazione geometrica

Ultimo aggiornamento: 4 Ottobre 2026

Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari



Qubit: definizione

SPAZIO DEGLI STATI

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ base

STATO

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Un qubit non è un bit con valore ignoto: è uno stato vettoriale normalizzato in uno spazio complesso bidimensionale.

Base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

PRIMO VETTORE DI BASE

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SECONDO VETTORE DI BASE

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione del ket

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}.$$

I coefficienti nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sono le componenti del ket.

Ampiezze e probabilità

AMPIEZZE

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

MISURA NELLA BASE $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$p(0) = |\alpha|^2, \qquad p(1) = |\beta|^2$$
$$p(0) + p(1) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Le ampiezze sono complesse; le probabilità sono moduli quadrati reali.

Lo stato $|+\rangle$

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+0\\0+1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}.$$

Lo stato $|-\rangle$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}.$$

Normalizzazione di $|+\rangle$ e $|-\rangle$

STATO $|+\rangle$

$$\langle +|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

STATO $|-\rangle$

$$\langle -|-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Ortogonalità di $|+\rangle$ e $|-\rangle$

$$\langle +| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$\langle +|-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

$|+\rangle$ e $|-\rangle$ sono stati normalizzati e ortogonali.

Stesse probabilità, stati diversi

STATI

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$|+\rangle \neq |-\rangle .$$

STESSE PROBABILITÀ

$$p_+(0) = p_-(0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p_+(1) = p_-(1) = \left|\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\langle +|-\rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Modulo e fase di un numero complesso

Ogni numero complesso non nullo si può scrivere in forma polare:

$$z = re^{i\phi}, \qquad r = |z| \geq 0, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

$$|z|^2 = z^* z = r^2, \qquad e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi.$$

Il modulo determina il valore di $|z|^2$; la fase è contenuta nel fattore $e^{i\phi}$.

Fase delle ampiezze di un qubit

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$\alpha = r_0 e^{i\gamma_0}, \qquad \beta = r_1 e^{i\gamma_1}, \qquad r_0, r_1 \geq 0.$$

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\gamma_0}\,|0\rangle + r_1 e^{i\gamma_1}\,|1\rangle\,.$$

$$p(0) = |\alpha|^2 = r_0^2, \qquad p(1) = |\beta|^2 = r_1^2.$$

Fase globale e fase relativa

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= r_0 e^{i\gamma_0} |0\rangle + r_1 e^{i\gamma_1} |1\rangle \\
&= e^{i\gamma_0} \left(r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\gamma_1 - \gamma_0)} |1\rangle \right).
\end{aligned}
$$

$\underbrace{e^{i\gamma_0}}_{\text{fattore di fase globale}}$, $\underbrace{e^{i(\gamma_1-\gamma_0)}}_{\text{fattore di fase relativa}}$.

La fase globale moltiplica tutto lo stato; la fase relativa confronta le due ampiezze.

Fase globale

$$|\psi'\rangle = e^{i\gamma}\,|\psi\rangle\,, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \Longrightarrow \quad |\psi'\rangle = e^{i\gamma}\alpha\,|0\rangle + e^{i\gamma}\beta\,|1\rangle\,.$$

La stessa fase moltiplica tutte le componenti: per questo si chiama globale.

Bra associato allo stato con fase globale

$$|\psi'\rangle = e^{i\gamma}\,|\psi\rangle$$

$$\langle\psi'| = \left(e^{i\gamma}\,|\psi\rangle\right)^{\dagger} = e^{-i\gamma}\,\langle\psi|\,.$$

il coniugato di $e^{i\gamma}$ è $e^{-i\gamma}$.

La fase globale non cambia le probabilità

$$p' = \langle\psi'| P |\psi'\rangle = \Big(e^{-i\gamma} \langle\psi|\Big) P \Big(e^{i\gamma} |\psi\rangle\Big)$$
$$= e^{-i\gamma} e^{i\gamma} \langle\psi| P |\psi\rangle = \langle\psi| P |\psi\rangle = p.$$

Nessuna misura può distinguere $|\psi\rangle$ da $e^{i\gamma}|\psi\rangle$.

La fase globale non modifica il proiettore

$$|\psi'\rangle\langle\psi'| = \left(e^{i\gamma}\,|\psi\rangle\right)\left(e^{-i\gamma}\,\langle\psi|\right)$$
$$= e^{i\gamma}e^{-i\gamma}\,|\psi\rangle\langle\psi| = \boxed{|\psi\rangle\langle\psi|}.$$

Due ket che differiscono solo per una fase globale rappresentano lo stesso stato fisico.

Fase relativa

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$\langle + | - \rangle = 0.$$

Il segno della seconda componente cambia la fase relativa: non è una fase globale.

Riduzione dei parametri dello stato

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad \alpha = r_0 e^{i\gamma_0}, \quad \beta = r_1 e^{i\gamma_1}.$$

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\gamma_0}\,|0\rangle + r_1 e^{i\gamma_1}\,|1\rangle\,.$$

PARAMETRI INIZIALI

$(r_0, r_1, \gamma_0, \gamma_1) \quad \Rightarrow \quad$ 4 parametri reali.

NORMALIZZAZIONE

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1.$$

$$4 \longrightarrow 3.$$

Riduzione dei parametri: fase globale

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\gamma_0} |0\rangle + r_1 e^{i\gamma_1} |1\rangle$$
$$= e^{i\gamma_0} \left(r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\gamma_1 - \gamma_0)} |1\rangle \right).$$

$$\underbrace{e^{i\gamma_0}}_{\text{fase globale}}, \qquad \underbrace{\phi = \gamma_1 - \gamma_0}_{\text{fase relativa}}.$$

$$4 \xrightarrow{\text{normalizzazione}} 3 \xrightarrow{\text{fase globale non fisica}} 2.$$

Parametrizzazione dei moduli delle ampiezze

$$r_0^2 + r_1^2 = 1, \qquad r_0, r_1 \geq 0.$$

$$r_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad r_1 = \sin\frac{\theta}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 1.$$

La normalizzazione consente di descrivere i due moduli con un solo parametro reale θ.

Fase globale e fase relativa: riepilogo

FASE GLOBALE

$$|\psi'\rangle = e^{i\gamma}\,|\psi\rangle$$

$|\psi'\rangle$ e $|\psi\rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico.

FASE RELATIVA

$$\phi = \gamma_1 - \gamma_0$$

$$|\psi\rangle = r_0\,|0\rangle + r_1 e^{i\phi}\,|1\rangle$$

ϕ distingue stati fisicamente diversi.

Forma standard di Bloch

$$\boxed{|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle}$$

$$0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi < 2\pi.$$

θ controlla i moduli; ϕ è la fase relativa.

Gli estremi: $\theta = 0$ e $\theta = \pi$

$\theta = 0$

$$|\psi\rangle = \cos 0\,|0\rangle + e^{i\phi} \sin 0\,|1\rangle = |0\rangle\,.$$

$\theta = \pi$

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\pi}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\pi}{2}\,|1\rangle = e^{i\phi}\,|1\rangle\,.$$

Gli stati $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ corrispondono ai due valori possibili di un bit classico; un qubit può invece trovarsi in uno qualunque degli stati con $0 < \theta < \pi$.

Dagli angoli alle coordinate della sfera

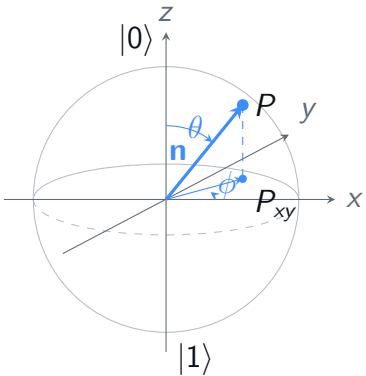
$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\,.$$

Alla coppia (θ, ϕ) associamo il punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ della sfera unitaria:

$$x = \sin\theta\cos\phi, \qquad y = \sin\theta\sin\phi, \qquad z = \cos\theta.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = 1.$$

La sfera di Bloch



STATO

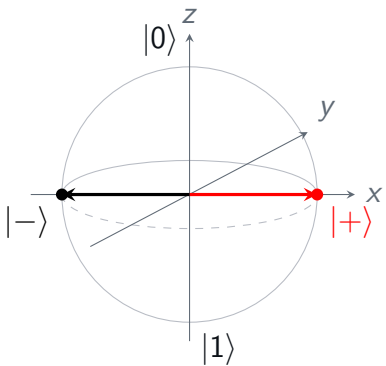
$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

VETTORE DI BLOCH

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad |\mathbf{n}| = 1.$$

Nota. Il vettore disegnato è $\mathbf{n}$, non il ket $|\psi\rangle$.

Gli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sulla sfera di Bloch



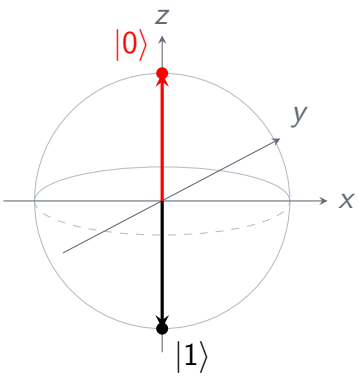
ASSE x

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \longleftrightarrow \quad (1,0,0).$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \longleftrightarrow \quad (-1,0,0).$$

Rosso: $|+\rangle$. Nero: $|-\rangle$.

Gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sulla sfera di Bloch



ASSE z

$$|0\rangle \quad \longleftrightarrow \quad (0,0,1).$$
$$|1\rangle \quad \longleftrightarrow \quad (0,0,-1).$$

Rosso: $|0\rangle$. Nero: $|1\rangle$.

Probabilità computazionali nella forma di Bloch

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\,.$$

$$p(0) = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$p(1) = \left|e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = |e^{i\phi}|^2\sin^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

La coordinata z come differenza di probabilità

$$p(0) - p(1) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a) \quad \Rightarrow \quad p(0) - p(1) = \cos\theta = z.$$

La coordinata z misura lo sbilanciamento tra i risultati 0 e 1.

La sfera di Bloch non è lo spazio fisico ordinario

SPAZIO DEGLI STATI

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

$$|\psi\rangle \sim e^{i\gamma}\,|\psi\rangle$$

SFERA DI BLOCH

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

La sfera di Bloch è una rappresentazione geometrica degli stati di un solo qubit.

Trasformazioni dello stato di un qubit

Una porta agisce sullo stato del qubit trasformando un ket in un altro ket:

$$|\psi\rangle \longmapsto |\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle\,.$$

Se $|\psi\rangle$ è uno stato fisico, allora deve valere

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Dopo la trasformazione vogliamo ancora uno stato normalizzato:

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = 1.$$

Una porta quantistica deve trasformare stati normalizzati in stati normalizzati.

Perché la trasformazione deve essere unitaria

Se

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle\,, \qquad \langle\psi'| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

allora

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\,U^\dagger U\,|\psi\rangle\,.$$

Per avere $\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$ per ogni $|\psi\rangle$, imponiamo

$$\boxed{U^\dagger U = I.}$$

Una matrice che soddisfa questa condizione è detta **unitaria**.

Trasformazione unitaria: esempio

OPERATORE

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

AZIONE SULLO STATO

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \frac{4+1}{5} = 1.$$

La norma dello stato resta invariata.

Trasformazione non unitaria: esempio

OPERATORE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

AZIONE SULLO STATO

$$A\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|A\,|\psi\rangle\|^2 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \neq 1.$$

La norma dello stato non resta invariata.

La porta X

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

$$X|0\rangle = |1\rangle, \qquad X|1\rangle = |0\rangle.$$

La porta X scambia i due stati della base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$.

La porta Z

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle.$$

$$Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.$$

Z modifica la fase relativa tra le due componenti.

Porta di Hadamard H

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

DA $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ A $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$H|0\rangle = |+\rangle, \qquad H|1\rangle = |-\rangle.$$

RITORNO ALLA BASE $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$H|+\rangle = |0\rangle, \qquad H|-\rangle = |1\rangle.$$

$$H^2 = I.$$

La porta H mette in relazione le basi $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Scelta della base di misura

Scegliere una base di misura significa stabilire quali stati la misura distingue.

$$\{|u_0\rangle, |u_1\rangle\} \quad \Longrightarrow \quad \text{esiti associati a } |u_0\rangle, |u_1\rangle.$$

Se

$$|\psi\rangle = a\,|u_0\rangle + b\,|u_1\rangle,$$

allora la misura in quella base dà

$$p(u_0) = |a|^2, \qquad p(u_1) = |b|^2.$$

Le probabilità dipendono dalla base di misura scelta.

Probabilità come componenti nella base

Le componenti si ottengono con il prodotto interno:

$$a = \langle u_0|\psi\rangle\,, \qquad b = \langle u_1|\psi\rangle\,.$$

Quindi

$$\boxed{p(u_0) = |\,\langle u_0|\psi\rangle\,|^2, \qquad p(u_1) = |\,\langle u_1|\psi\rangle\,|^2.}$$

Nel caso della base $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \Rightarrow \quad p(0) = |\alpha|^2, \quad p(1) = |\beta|^2.$$

La stessa misura? No: basi diverse

Consideriamo lo stesso stato:

$$|\psi\rangle = |0\rangle\,.$$

Nella base $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$:

$$|0\rangle = 1\,|0\rangle + 0\,|1\rangle \quad \Rightarrow \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 0.$$

Nella base $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$:

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p(+) = p(-) = \frac{1}{2}.$$

Probabilità e proiettori

Alla base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ associamo i proiettori

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|, \qquad P_0 + P_1 = I.$$

Se

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle,$$

allora

$$\begin{aligned}\langle\psi|\,P_0\,|\psi\rangle &= \langle\psi|\,|0\rangle\,\langle 0|\,|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|0\rangle\,\langle 0|\psi\rangle = \alpha^*\alpha = |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Probabilità e proiettori: secondo esito

Per l'esito associato a $|1\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\psi| P_1 |\psi\rangle &= \langle\psi| |1\rangle \langle 1| |\psi\rangle \\ &= \langle\psi|1\rangle \langle 1|\psi\rangle = \beta^* \beta = |\beta|^2.\end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{p(0) = \langle\psi| P_0 |\psi\rangle\,, \qquad p(1) = \langle\psi| P_1 |\psi\rangle\,.}$$

Che cosa accade allo stato dopo la misura

Scegliamo una base di misura $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = a\,|u_0\rangle + b\,|u_1\rangle\,.$$

Se la misura restituisce l'esito m, con

$$m = 0 \quad \text{oppure} \quad m = 1,$$

allora dopo la misura il qubit si trova nello stato associato a quell'esito:

$$m = 0 \Rightarrow |u_0\rangle\,, \qquad m = 1 \Rightarrow |u_1\rangle\,.$$

Stato dopo la misura: formula generale

Per un esito m con probabilità non nulla:

$$\boxed{|\psi_m\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_m |\psi\rangle}}.}$$

NUMERATORE

$$P_m |\psi\rangle$$

seleziona la componente lungo lo stato corrispondente all'esito m.

DENOMINATORE

$$\sqrt{\langle\psi| P_m |\psi\rangle} = \sqrt{p(m)}$$

normalizza il vettore ottenuto.

Stato dopo la misura nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

Sia

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,.$$

ESITO 0

$$P_0\,|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi_0\rangle = |0\rangle\,.$$

ESITO 1

$$P_1\,|\psi\rangle = \beta\,|1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi_1\rangle = |1\rangle\,.$$

Misura di $|0\rangle$ nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Usiamo

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Quindi le componenti di $|0\rangle$ nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sono entrambe $1/\sqrt{2}$:

$$p(+) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \qquad p(-) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Dopo la misura:

$$\text{esito } + \Rightarrow |\psi_+\rangle = |+\rangle, \qquad \text{esito } - \Rightarrow |\psi_-\rangle = |-\rangle.$$

Verifica con i prodotti interni

$$\langle +| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \langle -| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\langle +|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 1 + 1\cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle -|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 1 - 1\cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{p(+) = p(-) = \frac{1}{2}.}$$

Osservabili nel caso del qubit

A una grandezza fisica misurabile associamo un operatore hermitiano:

$$A^\dagger = A.$$

Se

$$A\left|a_i\right\rangle = a_i\left|a_i\right\rangle,$$

allora

RISULTATI POSSIBILI

$$a_i = \text{autovalori di } A$$

BASE DI MISURA

$$\left\{\left|a_0\right\rangle, \left|a_1\right\rangle\right\}$$

sono gli autostati di A.

Osservabili e porte: ruoli diversi

OSSERVABILE

$$A^\dagger = A$$

rappresenta una grandezza misurabile.

PORTA

$$U^\dagger U = I$$

rappresenta una trasformazione dello stato.

La stessa matrice può avere ruoli diversi solo se soddisfa entrambe le proprietà.