LEZIONE 04/30

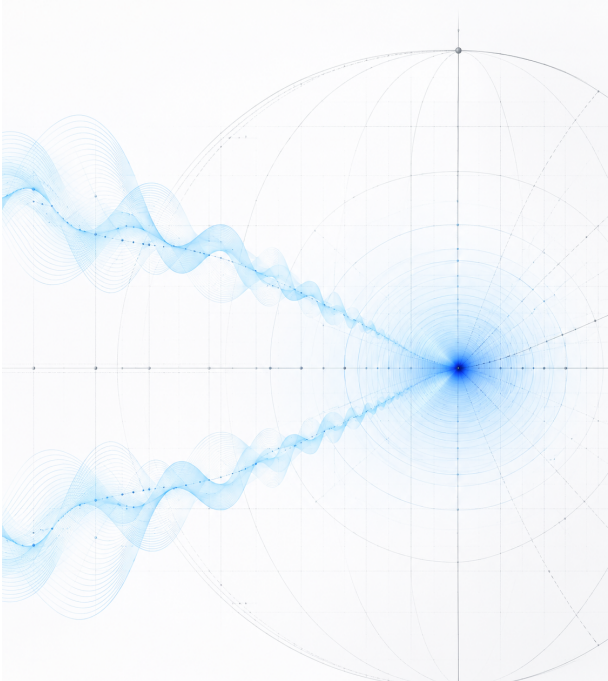
Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Prodotto tensoriale

Calcoli con prodotti di Kronecker e operatori composti

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari

Ultimo aggiornamento: 02 Ottobre 2026



Che cosa intendiamo per tensore

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Il loro prodotto tensoriale $V \otimes W$ è lo spazio vettoriale generato dai simboli

$$v \otimes w, \qquad v \in V, \quad w \in W,$$

soggetti alle regole di bilinearità:

$$(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w = \alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w),$$

$$v \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v \otimes w_1) + \beta(v \otimes w_2).$$

Il prodotto di Kronecker $v\otimes$ è anche detto prodotto tensoriale.

Base del prodotto tensoriale

Se

$$\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots, e_m\}, \qquad \mathcal{B}_W = \{f_1, \dots, f_p\},$$

allora una base naturale di $V \otimes W$ è

$$\mathcal{B}_{V\otimes W} = \{e_i \otimes f_j : i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, p\}.$$

Quindi

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \, \dim W = mp.$$

$$v = \sum_i v_i e_i, \qquad w = \sum_j w_j f_j \quad \Longrightarrow \quad v \otimes w = \sum_{i,j} v_i w_j (e_i \otimes f_j).$$

Il prodotto tensoriale è la rappresentazione matriciale di questa costruzione dopo avere scelto le basi.

Prodotto tensoriale e prodotto vettoriale

Il prodotto tensoriale non va confuso con il prodotto vettoriale ordinario.

Prodotto tensoriale	**Prodotto vettoriale**
$v \otimes w \in V \otimes W$	$v \times w \in \mathbb{R}^3$
costruisce uno spazio composto	resta nello spazio tridimensionale
$\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$	la dimensione resta 3
non è anticommutativo	$v \times w = -w \times v$
conserva l'ordine dei fattori	produce un vettore perpendicolare

$$e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1, \qquad e_1 \times e_2 = e_3, \qquad e_2 \times e_1 = -e_3.$$

Useremo $\otimes$ per costruire sistemi composti di matrici che appartengono ad uno spazio più grande di quello dei termini del prodotto stesso.

Dal vettore composto alla matrice composta

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 y \\ x_2 y \\ \vdots \\ x_m y \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento di A viene sostituito dal blocco $a_{ij}B$.

Controllo dimensionale del prodotto tensoriale

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), \qquad B \in M_{p\times q}(\mathbb{C}).$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \otimes B \in M_{mp\times nq}(\mathbb{C}).}$$

m righe di blocchi, n colonne di blocchi; ogni blocco ha dimensione $p \times q$.

Esempio: prima si costruisce la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1B & 3B \\ 0B & 1B \end{pmatrix}.$$

$$1B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad 0B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio: poi si espande il blocco in una matrice ordinaria

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Il prodotto di due matrici 2×2 genera una matrice 4×4.

Esempio: matrici rettangolari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}.$$

$$A \otimes B \in M_{2\times 6}.$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1B & 2B & -B \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}.}$$

Bilinearità di $\otimes$

$$(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C.$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A+B)\otimes C=\begin{pmatrix}1C & 2C\\ 3C & 1C\end{pmatrix}=A\otimes C+B\otimes C.$$

Operazioni con gli scalari

$$(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B) = A \otimes (\lambda B).$$

$$\lambda = 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3A) \otimes B = \begin{pmatrix} 3B & 6B \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} B & 2B \end{pmatrix} = 3(A \otimes B).$$

$$A \otimes (3B) = \begin{pmatrix} 3B & 2(3B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3B & 6B \end{pmatrix}.$$

Associatività di $\otimes$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

$$A : m_1 \times n_1, \quad B : m_2 \times n_2, \quad C : m_3 \times n_3.$$

$$(A \otimes B) \otimes C : (m_1 m_2 m_3) \times (n_1 n_2 n_3),$$

$$A \otimes (B \otimes C) : (m_1 m_2 m_3) \times (n_1 n_2 n_3).$$

Si deve rispettare l'ordine dei fattori.

Non commutatività: $A \otimes B$ e $B \otimes A$ non coincidono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prodotto misto: la regola fondamentale di calcolo

$$\boxed{(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).}$$

$$A : m \times n, \quad C : n \times r, \qquad B : p \times q, \quad D : q \times s.$$

$$A \otimes B : (mp) \times (nq), \qquad C \otimes D : (nq) \times (rs).$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) : (mp) \times (rs).$$

$$(AC) \otimes (BD) : (mr) \times (ps) = (mp) \times (rs).$$

Esempio: prodotto misto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio: prodotto misto

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad BD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(AC) \otimes (BD) = \begin{pmatrix} 2BD & 0BD \\ 0BD & 2BD \end{pmatrix}.$$

$$2BD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad 0BD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Trasposta e coniugata

$$\boxed{(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,} \qquad \boxed{(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$

Aggiunta

$$A^\dagger = (A^*)^T, \qquad B^\dagger = (B^*)^T.$$

$$\boxed{(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix} \implies B^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inversa del prodotto tensoriale

Se A e B sono invertibili, allora

$$\boxed{(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.}$$

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}).$$
$$= (I_m) \otimes (I_p).$$
$$I_m \otimes I_p = I_{mp}.$$
$$\boxed{(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_{mp}.}$$

Esempio: Inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(A \otimes B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

Traccia del prodotto tensoriale

Per $A \in M_m(\mathbb{C})$ e $B \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B).}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 3 = 4, \qquad \mathrm{Tr}(B) = 4 + (-1) = 3.$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A \otimes B) = 4 \cdot 3 = 12.}$$

Esempio: calcolo della traccia

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1B & 2B \\ 0B & 3B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = 4 + (-1) + 12 + (-3) = 12.$$

$$\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) = 4 \cdot 3 = 12.$$

La formula dà la traccia senza dover fare il calcolo della matrice risultante.

Determinante del prodotto tensoriale

Se $A \in M_m(\mathbb{C})$ e $B \in M_n(\mathbb{C})$, allora

$$\boxed{\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 3, \qquad \det B = 4(-1) - 0 = -4.$$

$$\boxed{\det(A \otimes B) = 3^2 (-4)^2 = 9 \cdot 16 = 144.}$$

Rango del prodotto tensoriale

Per matrici anche rettangolari:

$$\boxed{\operatorname{rank}(A \otimes B) = \operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B).}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}(A) = 1, \qquad \operatorname{rank}(B) = 2.$$

$$\boxed{\operatorname{rank}(A \otimes B) = 1 \cdot 2 = 2.}$$

Autovalori: il prodotto tensoriale moltiplica gli autovalori

Supponiamo

$$Ax = \lambda x, \qquad By = \mu y.$$

Allora

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By).$$
$$= (\lambda x) \otimes (\mu y) = \lambda\mu (x \otimes y).$$

$x \otimes y$ è autovettore di $A \otimes B$ con autovalore $\lambda\mu$.

Vettori di base nel prodotto tensoriale

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Ae_1 = 2e_1, \qquad Be_2 = 4e_2.$$

$$(A \otimes B)(e_1 \otimes e_2) = (Ae_1) \otimes (Be_2).$$

$$= (2e_1) \otimes (4e_2) = 8(e_1 \otimes e_2).$$

$$e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prodotto tensoriale triplo

$$A : m_1 \times n_1, \quad B : m_2 \times n_2, \quad C : m_3 \times n_3.$$

$$A \otimes B \otimes C : (m_1 m_2 m_3) \times (n_1 n_2 n_3).$$

$$A_k \in M_{d_k}(\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \in M_{\prod_{k=1}^{N} d_k}(\mathbb{C}).$$

$$\boxed{A_1, \ldots, A_N \in M_2(\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \in M_{2^N}(\mathbb{C}).}$$

Esempio: tre matrici 2×2

$$A, B, C \in M_2(\mathbb{C}).$$

$$A \otimes B \in M_4(\mathbb{C}).$$

$$(A \otimes B) \otimes C \in M_{4\cdot 2}(\mathbb{C}) = M_8(\mathbb{C}).$$

$$A \otimes (B \otimes C) \in M_{2\cdot 4}(\mathbb{C}) = M_8(\mathbb{C}).$$

Ogni nuovo sistema binario raddoppia la dimensione dello spazio.

Commutatore e anticommutatore

Per matrici quadrate della stessa dimensione:

$$\boxed{[A, B] = AB - BA,} \qquad \boxed{\{A, B\} = AB + BA.}$$

$$[A, B] = 0 \iff AB = BA.$$

Esempio: Commutatore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio: Commutatore

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Esempio: Anticommutatore

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

$$\{A, B\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Esponenziale di matrice: definizione

Per una matrice quadrata A:

$$\boxed{e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

La definizione è la stessa della funzione esponenziale scalare, sostituendo le potenze degli scalari con potenze delle matrici.

Esponenziale: matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.}$$

Esponenziale: se $A = SDS^{-1}$

Se

$$A = SDS^{-1},$$

allora

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1},$$
$$A^3 = (SD^2S^{-1})(SDS^{-1}) = SD^3S^{-1}.$$

Per induzione,

$$A^k = SD^kS^{-1}.$$
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right)S^{-1}.$$
$$\boxed{e^A = Se^DS^{-1}.}$$

Esempio: Esponenziale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono 1 e 2; si possono scegliere

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio: Esponenziale e^A

$$e^D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

$$e^A = Se^D S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Se^D = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}}.$$

Esponenziale della somma

Se $AB = BA$, allora

$$\boxed{e^{A+B} = e^A e^B.}$$

Se $AB \neq BA$, in generale

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

$[A, B] = 0 \implies$ la formula dell'esponenziale della somma è utilizzabile.

$[A, B] \neq 0 \implies$ serve cautela: l'ordine degli operatori conta.

Catena dei calcoli della lezione

01 **Prodotto di Kronecker**
costruzione a blocchi e controllo dimensionale

02 **Proprietà operative**
bilinearità, associatività, prodotto misto, aggiunta e inversa

03 **Invarianti e spettro**
traccia, determinante, rango, autovalori e autovettori

04 **Operatori non commutativi**
commutatore, anticommutatore ed esponenziale di matrice