LEZIONE 05–06/30

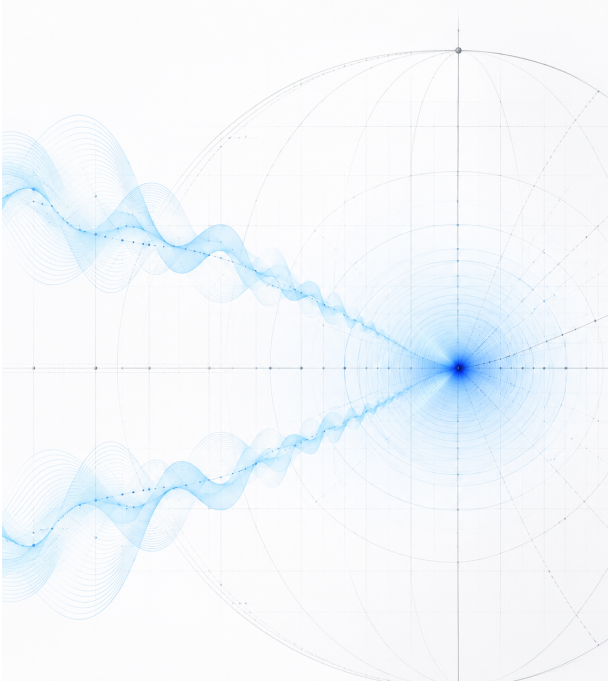
Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Notazione di Dirac

Stati, prodotti e operatori in forma astratta e matriciale

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari

Ultimo aggiornamento: 7 Ottobre 2026



La notazione di Dirac separa l'oggetto dalle coordinate

Un vettore dello spazio degli stati può essere indicato senza scegliere una base:

$$|\psi\rangle .$$

Solo dopo avere fissato una base ordinata

$$\mathcal{B} = \{|e_1\rangle , \ldots , |e_n\rangle\}$$

possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, |e_j\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} .$$

Il ket è un vettore: esempio in dimensione due

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se

$$|\psi\rangle = \alpha\,|e_1\rangle + \beta\,|e_2\rangle\,,$$

allora, usando piu spazio in orizzontale,

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}.$$

Dal ket al bra: trasposizione e coniugazione

Se

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

allora

$$\boxed{\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \cdots & \psi_n^* \end{pmatrix}.}$$

ket: $n \times 1$ bra: $1 \times n$

Il bra è la trasposta coniugata del ket.

Costruzione esplicita di un bra complesso

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Coniugazione complessa:

$$|\psi\rangle^{*} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Trasposizione:

$$(|\psi\rangle^{*})^{\mathsf{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}} = \langle\psi|\,.$$

Il prodotto interno è un bra-ket e produce uno scalare

Dati

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

si ha

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \cdots & \phi_n^* \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\boxed{\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\,|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \phi_j^* \psi_j.}$$

$$(1 \times n)(n \times 1) \longrightarrow 1 \times 1.$$

Prodotto interno: calcolo completo

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Prima costruiamo il bra:

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Poi

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= (1-\mathrm{i})2 + 2(1-\mathrm{i}) \\ &= 2 - 2\mathrm{i} + 2 - 2\mathrm{i} \\ &= \boxed{4-4\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Invertire l'ordine coniuga il prodotto interno

In generale

$$\langle \phi | \psi \rangle \neq \langle \psi | \phi \rangle \, .$$

Vale invece

$$\boxed{\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* \, .}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle^* &= \left(\sum_j \phi_j^* \psi_j \right)^* = \sum_j \phi_j \psi_j^* \\ &= \sum_j \psi_j^* \phi_j = \langle \psi | \phi \rangle \, . \end{aligned}$$

Norma e prodotto interno

$$\boxed{\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}.}$$

Se

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

allora

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_j |\psi_j|^2, \qquad \boxed{\|\psi\| = \sqrt{|\psi_1|^2 + \cdots + |\psi_n|^2}}.$$

Stato normalizzato:

$$\boxed{\langle\psi|\psi\rangle = 1.}$$

Normalizzazione

Sia

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \langle w| = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto interno è

$$\begin{aligned} \langle w|w\rangle &= \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) + 2\cdot 2 \\ &= 1+\mathrm{i}-\mathrm{i}-\mathrm{i}^2+4 = 2+4 = 6. \end{aligned}$$

Quindi

$$\|w\| = \sqrt{6}, \qquad \boxed{|u\rangle = \frac{|w\rangle}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

Ortogonalità

Due vettori sono ortogonali se

$$\boxed{\langle \phi | \psi \rangle = 0.}$$

Consideriamo

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1) = \boxed{0}. \end{aligned}$$

Ortogonalità: esempio

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\langle u|u\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = \boxed{1}.$$

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = \boxed{1}.$$

$\langle u|v\rangle = 0$, $\langle u|u\rangle = 1$, $\langle v|v\rangle = 1$: **la base è ortonormale.**

Base ortonormale

Una base

$$\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$$

è ortonormale se

$$\boxed{\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ortogonalità: $i \neq j \Rightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0$.

Normalizzazione: $i = j \Rightarrow \langle e_i | e_i \rangle = 1$.

Bra-ket e ket-bra: l'ordine cambia il risultato

BRA-KET: PRODOTTO INTERNO

$$\langle v| \, |u\rangle = \langle v|u\rangle$$

$$(1 \times n)(n \times 1) \longrightarrow 1 \times 1$$

Produce uno **scalare**: un numero complesso.

KET-BRA: PRODOTTO ESTERNO

$$|u\rangle \, \langle v|$$

$$(n \times 1)(1 \times n) \longrightarrow n \times n$$

Produce un **operatore**: una matrice.

Gli stessi due simboli, invertiti, producono oggetti matematici diversi.

Prodotto esterno

Se $|u\rangle, |v\rangle \in \mathbb{C}^n$, allora

$$|u\rangle \langle v| = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1^* & \cdots & u_1 v_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1^* & \cdots & u_n v_n^* \end{pmatrix}.$$

Agendo su un ket:

$$(|u\rangle \langle v|) |\psi\rangle = |u\rangle \langle v|\psi\rangle .$$

Prima si calcola lo scalare $\langle v|\psi\rangle$; poi si moltiplica il ket $|u\rangle$.

Il bra di base estrae una coordinata

Se $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle$, allora il bra di base $\langle e_j|$ seleziona il coefficiente j:

$$\langle e_j|\psi\rangle = \langle e_j| \left(\sum_k \psi_k |e_k\rangle \right) = \sum_k \psi_k \langle e_j|e_k\rangle = \sum_k \psi_k \delta_{jk} = \boxed{\psi_j}.$$

In una base ortonormale: $\psi_j = \langle e_j|\psi\rangle$.

La forma $|e_j\rangle\langle e_j|$ seleziona una sola componente

Il prodotto esterno

$$|e_j\rangle\langle e_j|$$

è un operatore. Applicato a $|\psi\rangle$ dà

$$(|e_j\rangle\langle e_j|)\,|\psi\rangle = |e_j\rangle\left(\langle e_j|\,|\psi\rangle\right) = |e_j\rangle\langle e_j|\psi\rangle = \psi_j\,|e_j\rangle\,.$$

Il ket-bra non è uno scalare: è l'operatore che estrae e ricostruisce la componente j.

Proprietà della base

Per una base ortonormale completa

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle \langle e_j| .}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\left(\sum_j |e_j\rangle \langle e_j|\right) |\psi\rangle &= \sum_j |e_j\rangle \langle e_j|\psi\rangle \\ &= \sum_j \psi_j |e_j\rangle \\ &= \boxed{|\psi\rangle}.\end{aligned}$$

Proprietà della base in dimensione due

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$|e_1\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |e_2\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = I.$$

Prodotto esterno: esempio

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Prima

$$\langle v| = \begin{pmatrix} 2 & 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$|u\rangle \langle v| = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 + \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & \mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) \end{pmatrix}.$$

Prodotto esterno: esempio

L'elemento in basso a destra è

$$\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} - 1.$$

Pertanto

$$\boxed{|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.}$$

Un solo prodotto esterno costruito da due vettori non nulli ha rango 1.

Azione del prodotto esterno: calcolo matriciale

Prendiamo

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la matrice appena costruita:

$$\begin{aligned} (|u\rangle \langle v|)\,|w\rangle &= \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

La stessa azione direttamente in notazione di Dirac

Associamo da destra:

$$(|u\rangle\langle v|)\,|w\rangle = |u\rangle\,\big(\langle v|\,|w\rangle\big).$$

Prima

$$\langle v|\,|w\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Poi

$$|u\rangle\langle v|w\rangle = 2\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}}.$$

Il calcolo astratto e quello matriciale coincidono esattamente.

Un operatore lineare agisce su un ket

In forma astratta:

$$A\,|\psi\rangle\,.$$

Scelta una base, per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$A\,|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}}.$$

Elementi di matrice: bra-operatore-ket

In una base ortonormale

$$\boxed{A_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle .}$$

Lettura operativa:

$$|e_j\rangle \xrightarrow{A} A|e_j\rangle \xrightarrow{\langle e_i|} \langle e_i| A |e_j\rangle .$$

Il ket $|e_j\rangle$ seleziona la colonna j; il bra $\langle e_i|$ seleziona la riga i.

Calcolo di un elemento di matrice: esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\langle e_1 | A | e_2 \rangle$. Prima agisce A:

$$A|e_2\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}.$$

Calcolo di un elemento di matrice: esempio

Poiché

$$\langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

segue

$$\langle e_1| A |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \boxed{b}.$$

Ma $b = A_{12}$, quindi

$$\boxed{\langle e_1| A |e_2\rangle = A_{12}.}$$

Rappresentazione di un operatore nella base

Gli elementi di matrice sono i coefficienti dell'operatore nella base degli operatori $|e_i\rangle\langle e_j|$:

$$\boxed{A_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle .}$$

Inserendo due volte la risoluzione dell'identità si ottiene

$$\begin{aligned} A = IAI &= \left(\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| \right) A \left(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| \right) \\ &= \sum_{i,j} |e_i\rangle \underbrace{\langle e_i | A | e_j \rangle}_{A_{ij}} \langle e_j| . \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \sum_{i,j} A_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| .}$$

Base degli operatori in dimensione due

$$|e_1\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |e_1\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|e_2\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ognuno contiene un solo elemento unitario nella posizione (i, j).

Rappresentazione di un operatore in dimensione due

Per

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} A &= a\,|e_1\rangle\langle e_1| + b\,|e_1\rangle\langle e_2| + c\,|e_2\rangle\langle e_1| + d\,|e_2\rangle\langle e_2| \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

L'aggiunto di un operatore è la trasposta coniugata

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

allora prima coniughiamo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poi trasponiamo:

$$\boxed{A^\dagger = (A^*)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}.}$$

L'aggiunto in notazione di Dirac

Per un operatore che agisce su un ket:

$$\boxed{(A\,|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\,A^\dagger.}$$

Più in generale

$$\boxed{(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.}$$

Il motivo è lo stesso visto per prodotti di matrici: trasporre un prodotto inverte l'ordine dei fattori.

Proiettore

Sia $|u\rangle$ normalizzato, cioè $\langle u|u\rangle = 1$. Definiamo

$$\boxed{P_u = |u\rangle\langle u|\,.}$$

Su un vettore arbitrario:

$$P_u\,|\psi\rangle = |u\rangle\langle u|\,|\psi\rangle = |u\rangle\,\langle u|\psi\rangle\,.$$

Ponendo $c = \langle u|\psi\rangle$, si ottiene

$$\boxed{P_u\,|\psi\rangle = c\,|u\rangle\,.}$$

Quindi $P_u\,|\psi\rangle$ appartiene alla retta generata da $|u\rangle$: P_u proietta lungo $|u\rangle$.

Idempotenza del proiettore: calcolo diretto

$$
\begin{aligned}
P_u^2 &= (|u\rangle\langle u|)(|u\rangle\langle u|) \\
&= |u\rangle \underbrace{\langle u|u\rangle}_{1} \langle u| \\
&= |u\rangle\langle u| \\
&= \boxed{P_u}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\boxed{P_u^2 = P_u.}$$

Il proiettore conserva una componente ed elimina quella ortogonale

Sia $\{|u\rangle, |v\rangle\}$ ortonormale e

$$|\psi\rangle = a\,|u\rangle + b\,|v\rangle\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} P_u\,|\psi\rangle &= |u\rangle\,\langle u|\,(a\,|u\rangle + b\,|v\rangle) \\ &= |u\rangle\,(a\,\langle u|u\rangle + b\,\langle u|v\rangle) \\ &= |u\rangle\,(a\cdot 1 + b\cdot 0) \\ &= \boxed{a\,|u\rangle}. \end{aligned}$$

Prodotto tensoriale in notazione di Dirac

Per due ket

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

il prodotto tensoriale è

$$|u\rangle \otimes |v\rangle \longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix}}.$$

Spesso, quando non c'è ambiguità,

$$|u\rangle \otimes |v\rangle \equiv |uv\rangle\,.$$

Prodotto tensoriale di due ket: calcolo esplicito

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,|v\rangle \\ 2\,|v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}}.$$

Operatori su sistemi composti: tensori di operatori

Se A agisce sul primo spazio e B sul secondo,

$$A \otimes B$$

agisce sul prodotto tensoriale secondo

$$\boxed{(A \otimes B)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (A\,|u\rangle) \otimes (B\,|v\rangle).}$$

In particolare, un operatore locale sul primo sottosistema è

$$A \otimes I,$$

mentre sul secondo è

$$I \otimes B.$$

Dizionario essenziale: Dirac e matrici

Dirac	Rappresentazione in una base
$\lvert\psi\rangle$	colonna $n \times 1$
$\langle\psi\rvert$	riga $1 \times n$, trasposta coniugata
$\langle\phi\lvert\psi\rangle$	scalare, riga $\times$ colonna
$\lvert u\rangle\langle v\rvert$	operatore, colonna $\times$ riga
$A\lvert\psi\rangle$	matrice $\times$ colonna
$\langle e_i\rvert A\lvert e_j\rangle$	elemento A_{ij}

Operazioni (espressioni) di Dirac

Espressione	Dimensioni	Risultato
$\langle\phi\|\,\|\psi\rangle$	$(1\times n)(n\times 1)$	scalare
$\|u\rangle\,\langle v\|$	$(n\times 1)(1\times n)$	matrice
$A\,\|\psi\rangle$	$(n\times n)(n\times 1)$	ket
$\langle\phi\|\,A\,\|\psi\rangle$	$(1\times n)(n\times n)(n\times 1)$	scalare

Prima del calcolo: identificare sempre il tipo dell'oggetto risultante.

Ordine nelle operazioni di Dirac

Nell'espressione

$$\langle\phi|\, BA\, |\psi\rangle$$

il calcolo procede da destra:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{A} A\,|\psi\rangle \xrightarrow{B} BA\,|\psi\rangle \xrightarrow{\langle\phi|} \langle\phi|\, BA\, |\psi\rangle\,.$$

Se $AB \neq BA$, scambiare A e B modifica il risultato.

La grammatica completa della notazione di Dirac

Espressione	Significato operativo
$\|\psi\rangle \overset{\dagger}{\leftrightarrow} \langle\psi\|$	ket e bra sono legati da trasposizione coniugata
$\langle\phi\|\psi\rangle$	prodotto interno: produce uno scalare
$\|u\rangle\langle v\|$	prodotto esterno: produce un operatore
$A_{ij} = \langle e_i\| A \|e_j\rangle$	elemento di matrice nella base scelta
$A = \sum_{i,j} A_{ij} \|e_i\rangle\langle e_j\|$	rappresentazione dell'operatore
$P_u = \|u\rangle\langle u\|$	proiettore lungo $\|u\rangle$, se $\langle u\|u\rangle = 1$
$I = \sum_j \|e_j\rangle\langle e_j\|$	proprietà della base ortonormale