LEZIONE 03/30

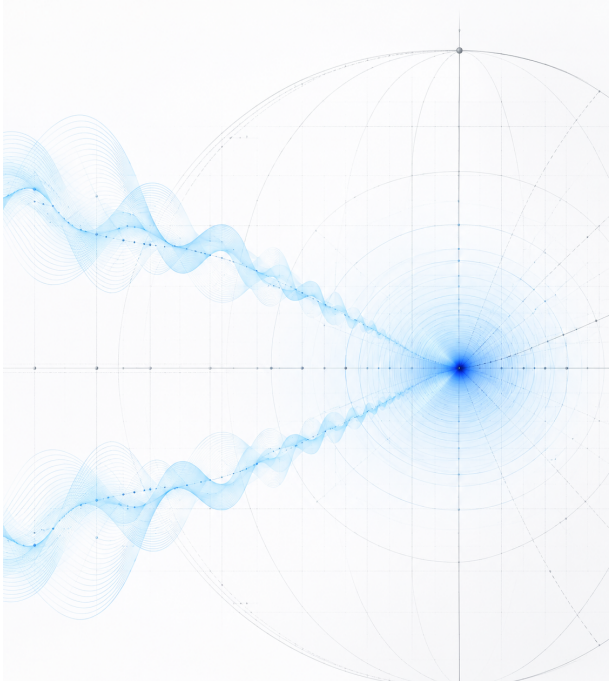
Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Algebra delle matrici

Calcoli espliciti con operatori finito-dimensionali

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari

Ultimo aggiornamento: 27 Settembre 2026



Una matrice è una tabella ordinata di coefficienti

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), \qquad m = n \Rightarrow A \text{ quadrata.}$$

Gli indici hanno un significato operativo: i seleziona la riga, j seleziona la colonna.

Colonne, righe e matrice identità

MATRICE COLONNA

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$$

MATRICE RIGA

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$$

IDENTITÀ

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n A = A, \qquad A I_n = A$$

Somma: si sommano elementi nella stessa posizione

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-2 \\ -1+5 & 3+1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}$$

La somma è definita solo per matrici della stessa dimensione.

Moltiplicazione per scalare

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$\lambda = 2 - i, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2-i)A = \begin{pmatrix} (2-i)\cdot 1 & (2-i)i \\ (2-i)2 & (2-i)(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2-i & 1+2i \\ 4-2i & -2+i \end{pmatrix}}$$

Proprietà lineari essenziali

SOMMA

$$A + B = B + A$$

ASSOCIATIVITÀ

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

DISTRIBUTIVITÀ

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

SCALARI

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Queste sono proprietà vettoriali: lo spazio delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale.

Prodotto matriciale: compatibilità dimensionale

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), \qquad B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$$
$$AB \in M_{m\times p}(\mathbb{C})$$

$$\boxed{(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

Numero di colonne di A = numero di righe di B.

Prodotto: calcolo degli elementi della prima riga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 2 + 2(-1) + (-1)3 = 2 - 2 - 3 = -3$$

$$(AB)_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1)2 = 1 + 0 - 2 = -1$$

Prodotto: completamento del calcolo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{21} = 0 \cdot 2 + 3(-1) + 4 \cdot 3 = 0 - 3 + 12 = 9$$

$$(AB)_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 0 + 0 + 8 = 8$$

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}}$$

Il prodotto matriciale non è commutativo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$. **L'ordine degli operatori conta.**

Associatività e distributività del prodotto

ASSOCIATIVITÀ

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(Bx) = (AB)x$$

DISTRIBUTIVITÀ

$$A(B + C) = AB + AC$$

DISTRIBUTIVITÀ

$$(A + B)C = AC + BC$$

Non si può cambiare l'ordine dei fattori, ma si possono riorganizzare le parentesi.

Potenze di una matrice quadrata

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A, \qquad A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ fattori}}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Potenze: dal caso A^2 al caso A^3

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Potenze: dimostrazione per induzione

$$\text{Ipotesi induttiva:} \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)}$$

Trasposta, coniugata e aggiunta

TRASPOSTA

$$A^{\mathsf{T}} = (a_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

CONIUGATA

$$A^{*} = (a_{ij}^{*})$$

$$(2 - 3i)^{*} = 2 + 3i$$

AGGIUNTA

$$\boxed{A^{\dagger} = (A^{*})^{\mathsf{T}}}$$

coniuga e traspone

Aggiunta: calcolo in due passaggi

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -i & 3-2i \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = (A^*)^\mathsf{T} = \boxed{\begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 3+2i \end{pmatrix}}$$

Prima si coniugano gli elementi, poi si scambiano righe e colonne.

Trasposta e aggiunta invertono l'ordine

TRASPOSTA

$$(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$$

AGGIUNTA

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A$$

PRODOTTO

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$$

PRODOTTO

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$$

L'inversione dell'ordine è una delle fonti principali di errori nei calcoli.

Matrice inversa: definizione e formula 2×2

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

L'inversa esiste solo per matrici quadrate non singolari.

Inversa: calcolo esplicito

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \boxed{I}$$

Inversa del prodotto: l'ordine si inverte

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I\end{aligned}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$$

Determinante: casi 2×2 e 3×3

ORDINE 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

ORDINE 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det A = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)}$$

Per il 3×3 la formula scritta è lo sviluppo lungo la prima riga.

Determinante 3×3: esempio svolto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3 \cdot 4 - 1 \cdot 0) - 2\Big((-1)4 - 1 \cdot 2\Big) + 0$$

$$= 12 - 2(-4 - 2) = 12 + 12 = \boxed{24}$$

Determinante e invertibilità

PRODOTTO

$$\det(AB) = \det A \det B$$

TRASPOSTA

$$\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$$

INVERSA

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

CRITERIO

$$A \text{ invertibile} \iff \det A \neq 0$$

Il determinante nullo segnala perdita di invertibilità.

Traccia: somma degli elementi diagonali

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 2 + (-1) + 5 = \boxed{6}$$

La traccia è definita per matrici quadrate.

Traccia: perché $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} \\ &= \sum_j (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

La traccia permette di scambiare ciclicamente i fattori, non di commutarli dentro la matrice.

Rango e criteri equivalenti di invertibilità

$\operatorname{rank}(A) =$ massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.

Per una matrice quadrata $n \times n$:

$$\boxed{A \text{ invertibile} \iff \operatorname{rank}(A) = n \iff \det A \neq 0.}$$

$$\operatorname{rank}(A) < n \quad \Longrightarrow \quad \exists x \neq 0 : \; Ax = 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ non invertibile.}$$

Autovalori e autovettori

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Una soluzione non nulla esiste se e solo se:

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0.}$$

L'equazione caratteristica determina gli autovalori.

Autovalori: calcolo del polinomio caratteristico

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3}$$

Autovettore per $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_2 = -x_1.$$

$$x_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Autovettore per $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_2 = x_1.$$

$$x_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Diagonalizzazione: costruzione di S e D

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$SD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AS = SD \quad \Longrightarrow \quad \boxed{S^{-1}AS = D}$$

Diagonalizzazione e potenze

$$S^{-1}AS = D \quad \Longleftrightarrow \quad A = SDS^{-1}$$

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$$

$$A^3 = (SD^2S^{-1})(SDS^{-1}) = SD^3S^{-1}$$

$$\boxed{A^n = SD^nS^{-1}}$$

Se

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

allora

$$\boxed{D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n).}$$

Matrici hermitiane

$$\boxed{H^\dagger = H}$$

$$H_{ij} = H_{ji}^*$$

$$H = \begin{pmatrix} a & b+ic & d+ie \\ b-ic & f & g+ih \\ d-ie & g-ih & \ell \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d, e, f, g, h, \ell \in \mathbb{R}.$$

Le matrici hermitiane hanno autovalori reali e sono diagonalizzabili mediante matrici unitarie.

Matrici unitarie

$$\boxed{U^\dagger U = UU^\dagger = I}$$

$$\boxed{U^{-1} = U^\dagger}$$

$$\langle Ux, Uy\rangle = (Ux)^\dagger (Uy) = x^\dagger U^\dagger U y = x^\dagger y = \langle x, y\rangle$$

Una matrice unitaria conserva prodotti interni e norme.

Esempio: verifica di unitarietà

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$U^\dagger = U$ perché U è reale e simmetrica.

$$U^\dagger U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{I}$$

Punto di arrivo

OPERAZIONI

$$A + B, \quad \lambda A, \quad AB, \quad A^n$$

OPERATORI

$$A^{\mathsf{T}}, \quad A^*, \quad A^\dagger, \quad A^{-1}$$

INVARIANTI E STRUTTURA

$$\det A, \quad \mathrm{Tr}(A), \quad \mathrm{rank}(A)$$

SPETTRO

$$Ax = \lambda x, \qquad S^{-1}AS = D$$

Prossimo passaggio: prodotto tensoriale e sistemi composti.