LEZIONE 09–10/30

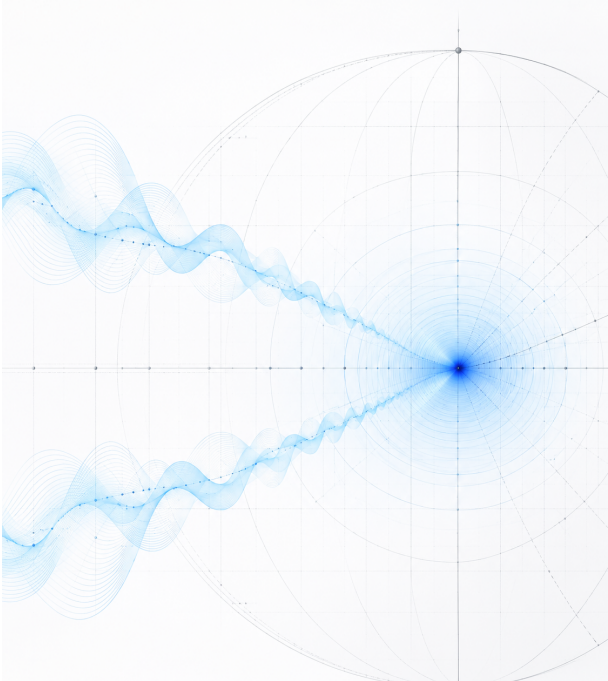
Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Due qubit, separabilità ed entanglement

Stati prodotto, stati di Bell e misura

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari

Ultimo aggiornamento: 17 Ottobre 2026



Spazio di Hilbert

In meccanica quantistica gli stati appartengono a uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto interno:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \qquad \langle\phi|\psi\rangle \in \mathbb{C}.$$

Il prodotto interno permette di definire la norma:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}, \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \text{per uno stato normalizzato.}$$

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale complesso con prodotto interno, completo rispetto alla norma indotta.

Completo significa che i limiti di successioni convergenti di stati restano nello spazio.

Dal singolo qubit al sistema composto

Per un qubit usiamo lo spazio degli stati generato da

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Per due qubit, indicati con A e B, lo spazio degli stati del sistema composto è

$$\boxed{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.}$$

Se ciascun qubit ha due stati di base, il sistema composto ha

$$2 \cdot 2 = 4$$

stati di base.

Il sistema composto non si descrive sommando gli spazi, ma prendendo il prodotto tensoriale.

La base di due qubit

La base naturale del sistema composto è

$$\{|0\rangle \otimes |0\rangle\,, |0\rangle \otimes |1\rangle\,, |1\rangle \otimes |0\rangle\,, |1\rangle \otimes |1\rangle\}.$$

Per abbreviare:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle\,, \qquad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle\,,$$
$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle\,, \qquad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle\,.$$

L'ordine dei due simboli indica l'ordine dei due qubit: prima A, poi B.

I quattro vettori di base in $\mathbb{C}^4$

Nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uno stato di due qubit è rappresentato da un vettore colonna con quattro componenti.

Costruzione esplicita di $|01\rangle$

Poiché

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\begin{aligned} |01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per la regola del prodotto tensoriale:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Costruzione esplicita di $|01\rangle$: risultato

Continuando il calcolo:

$$\begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\boxed{|01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.}$$

Il prodotto tensoriale costruisce un vettore di dimensione quattro a partire da due vettori di dimensione due.

Stato generale di due qubit

Uno stato generale di due qubit si scrive

$$\boxed{|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle}$$

con

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Richiamo: gli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$

Per un singolo qubit possiamo usare anche la base

$$\{|+\rangle, |-\rangle\}.$$

I due stati sono

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Invertendo le relazioni:

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Per due qubit possiamo costruire una base prodotto anche a partire da $|+\rangle$ e $|-\rangle$.

Base prodotto nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Se per ciascun qubit usiamo la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, allora per due qubit otteniamo

$$\boxed{\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}.}$$

Con la stessa convenzione usata per $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$:

$$|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle, \qquad |-+\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle.$$

La base cambia, ma lo spazio degli stati resta lo stesso: ha sempre dimensione quattro.

Calcolo esplicito di $|{+}{+}\rangle$

Partiamo da

$$|{+}{+}\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle\,.$$

Usando

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} |{+}{+}\rangle &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \end{aligned}$$

I vettori $|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle$

Usando

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

otteniamo:

$$|{+}{+}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right),$$

$$|{+}{-}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right),$$

$$|{-}{+}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right),$$

$$|{-}{-}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right).$$

Lo stesso stato in due basi diverse

Nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle\,.$$

Nella base $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|{+}{+}\rangle + \beta\,|{+}{-}\rangle + \gamma\,|{-}{+}\rangle + \delta\,|{-}{-}\rangle\,.$$

Non stiamo cambiando lo stato: stiamo cambiando le coordinate con cui lo rappresentiamo.

Normalizzazione e probabilità nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

Se

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle,$$

la normalizzazione richiede

$$\boxed{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1.}$$

Misurando nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$p(00) = |a|^2, \quad p(01) = |b|^2,$$
$$p(10) = |c|^2, \quad p(11) = |d|^2.$$

Normalizzazione e probabilità nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Se

$$|\psi\rangle = \alpha\,|{+}{+}\rangle + \beta\,|{+}{-}\rangle + \gamma\,|{-}{+}\rangle + \delta\,|{-}{-}\rangle,$$

la normalizzazione richiede

$$\boxed{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.}$$

Misurando nella base $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$:

$$p(++) = |\alpha|^2, \quad p(+-) = |\beta|^2,$$
$$p(-+) = |\gamma|^2, \quad p(--) = |\delta|^2.$$

Da $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ a $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: sostituzione

Sostituiamo nella decomposizione

$$|\psi\rangle = \alpha\,|{+}{+}\rangle + \beta\,|{+}{-}\rangle + \gamma\,|{-}{+}\rangle + \delta\,|{-}{-}\rangle\,.$$

Usando gli sviluppi dei quattro vettori:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = &\frac{\alpha}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)\\ &+ \frac{\beta}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)\\ &+ \frac{\gamma}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)\\ &+ \frac{\delta}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle).\end{aligned}$$

Da $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ a $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: coefficienti

Raccogliendo i coefficienti di $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}|00\rangle + \frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}|01\rangle + \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}|10\rangle + \frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}|11\rangle.$$

Confrontando con $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}, \quad b = \frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}, \\ c &= \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}, \quad d = \frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}. \end{aligned}}$$

Da $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ a $\{|+\rangle, |-\rangle\}$: esempio

Per trovare il coefficiente di $|{+}{+}\rangle$ calcoliamo la componente lungo $|{+}{+}\rangle$:

$$\alpha = \langle {+}{+}|\psi\rangle .$$

Poiché

$$\langle {+}{+}| = \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 01| + \langle 10| + \langle 11|),$$

segue

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 01| + \langle 10| + \langle 11|)(a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle) \\ &= \boxed{\frac{a+b+c+d}{2}}.\end{aligned}$$

Da $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ a $\{|+\rangle, |-\rangle\}$: coefficienti

Ripetendo lo stesso calcolo con $\langle +-|$, $\langle -+|$, $\langle --|$, otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b+c+d}{2}, \quad \beta = \frac{a-b+c-d}{2}, \\ \gamma &= \frac{a+b-c-d}{2}, \quad \delta = \frac{a-b-c+d}{2}. \end{aligned}}$$

Quindi le due scritture

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle$$

e

$$|\psi\rangle = \alpha\,|++\rangle + \beta\,|+-\rangle + \gamma\,|-+\rangle + \delta\,|--\rangle$$

rappresentano lo stesso ket in due basi diverse.

Due stati individuali

Supponiamo che il qubit A sia nello stato

$$|\psi_A\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,,$$

e che il qubit B sia nello stato

$$|\psi_B\rangle = \gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle\,.$$

Lo stato composto, se i due qubit sono descrivibili separatamente, è

$$\boxed{|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle\,.}$$

Sviluppo di uno stato prodotto

$$
\begin{aligned}
|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle &= (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes (\gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle) \\
&= \alpha\,|0\rangle \otimes (\gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle) \\
&\quad + \beta\,|1\rangle \otimes (\gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle).
\end{aligned}
$$

Usiamo la bilinearità del prodotto tensoriale per sviluppare i termini.

Sviluppo completo di uno stato prodotto

$$
\begin{aligned}
|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle &= \alpha\gamma\,|0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\delta\,|0\rangle \otimes |1\rangle \\
&\quad + \beta\gamma\,|1\rangle \otimes |0\rangle + \beta\delta\,|1\rangle \otimes |1\rangle \\
&= \alpha\gamma\,|00\rangle + \alpha\delta\,|01\rangle + \beta\gamma\,|10\rangle + \beta\delta\,|11\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Uno stato prodotto non ha quattro coefficienti indipendenti: derivano da due coppie di coefficienti.

Coefficienti di uno stato prodotto

Confrontiamo

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle$$

con

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \alpha\gamma\,|00\rangle + \alpha\delta\,|01\rangle + \beta\gamma\,|10\rangle + \beta\delta\,|11\rangle\,.$$

Allora, per uno stato prodotto,

$$\boxed{a = \alpha\gamma, \quad b = \alpha\delta, \quad c = \beta\gamma, \quad d = \beta\delta.}$$

Stati separabili ed entangled

Uno stato di due qubit è **separabile** se può essere scritto come

$$\boxed{|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \,.}$$

Se una tale fattorizzazione non esiste, lo stato è **entangled**:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad \text{per ogni scelta di } |\psi_A\rangle \,, |\psi_B\rangle \,.$$

L'entanglement è una proprietà dello stato globale, non una semplice correlazione tra risultati.

Esempio separabile: raccolta dei termini

Consideriamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

Raccogliamo rispetto al primo qubit:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2}\left[|0\rangle\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + |1\rangle\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle). \end{aligned}$$

Esempio separabile: fattorizzazione

Poiché

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

si ha

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle). \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle\,.}$$

Richiamo proprietà $\otimes$

Useremo tre proprietà operative:

$$(u+v)\otimes w = u\otimes w + v\otimes w,$$

$$u\otimes (w+z) = u\otimes w + u\otimes z,$$

$$(\lambda u)\otimes(\mu v) = \lambda\mu\,(u\otimes v).$$

Queste proprietà permettono di espandere uno stato prodotto e confrontarne i coefficienti.

Verso il criterio di separabilità

Se lo stato è prodotto,

$$|\psi\rangle = (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes (\gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle).$$

Sviluppando, come prima,

$$|\psi\rangle = \alpha\gamma\,|00\rangle + \alpha\delta\,|01\rangle + \beta\gamma\,|10\rangle + \beta\delta\,|11\rangle\,.$$

Dunque

$$a = \alpha\gamma, \quad b = \alpha\delta, \quad c = \beta\gamma, \quad d = \beta\delta.$$

Calcolo di $ad - bc$

Per uno stato prodotto:

$$a = \alpha\gamma, \quad b = \alpha\delta, \quad c = \beta\gamma, \quad d = \beta\delta.$$

Allora

$$\begin{aligned} ad - bc &= (\alpha\gamma)(\beta\delta) - (\alpha\delta)(\beta\gamma) \\ &= \alpha\beta\gamma\delta - \alpha\beta\delta\gamma \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

Criterio di separabilità per due qubit

Per uno stato di due qubit

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle\,,$$

vale il criterio

$$\boxed{|\psi\rangle \text{ separabile} \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc = 0.}$$

Se invece

$$ad - bc \neq 0,$$

lo stato non è separabile, cioè è entangled.

Il criterio vale per stati di due qubit scritti nella base $\{|00\rangle\,, |01\rangle\,, |10\rangle\,, |11\rangle\}$.

Esempio: applicazione del criterio

Consideriamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|00\rangle + 2\,|01\rangle + |10\rangle + 2\,|11\rangle).$$

I coefficienti sono

$$a = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad d = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} ad - bc &= \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{2}{10} - \frac{2}{10} = \boxed{0}. \end{aligned}$$

Esempio: fattorizzazione esplicita

Poiché $ad - bc = 0$, lo stato è separabile. Infatti:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + 2\,|1\rangle) \\
&= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + 2\,|1\rangle}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}
$$

Il criterio segnala la separabilità; la fattorizzazione mostra quali sono gli stati dei due qubit.

Stati non separabili particolarmente importanti

Il criterio di separabilità permette di riconoscere subito uno stato non separabile. Consideriamo

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

I coefficienti nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ sono

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Allora

$$ad - bc = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot 0 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Quindi $|\Phi^+\rangle$ non è separabile.

Gli stati di Bell

Questo stato appartiene a una famiglia di quattro stati fondamentali, detti **stati di Bell**:

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \left|\Phi^-\right\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \left|\Psi^-\right\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Sono gli stati elementari fondamentali di stati entangled di due qubit.

Gli stati di Bell formano una base

Lo spazio degli stati di due qubit ha dimensione

$$\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Quindi quattro vettori ortonormali in questo spazio formano una base.

$$\text{base} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{quattro vettori ortonormali.}$$

Per gli stati di Bell dobbiamo verificare:

$$\langle B_i | B_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Normalizzazione di $\left|\Phi^+\right\rangle$

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi^+\middle|\Phi^+\right\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 11|)(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|00\rangle + \langle 00|11\rangle + \langle 11|00\rangle + \langle 11|11\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) \\ &= \boxed{1}.\end{aligned}$$

Prodotti interni nella base di due qubit

Nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, i prodotti interni si calcolano come prodotti riga-colonna:

$$\langle 00|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \langle 11|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\langle 10|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \langle 01|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

I vettori diversi della base sono ortogonali; ciascun vettore di base ha norma uno.

Normalizzazione degli altri stati di Bell

$$\left\langle \Phi^- \middle| \Phi^- \right\rangle = \frac{1}{2}(\langle 00| - \langle 11|)(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2}(1 - 0 - 0 + 1) = 1,$$

$$\left\langle \Psi^+ \middle| \Psi^+ \right\rangle = \frac{1}{2}(\langle 01| + \langle 10|)(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1,$$

$$\left\langle \Psi^- \middle| \Psi^- \right\rangle = \frac{1}{2}(\langle 01| - \langle 10|)(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{2}(1 - 0 - 0 + 1) = 1.$$

Ortogonalità fra Φ^+ e Φ^-

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi^+ \middle| \Phi^- \right\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 11|)(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|00\rangle - \langle 00|11\rangle + \langle 11|00\rangle - \langle 11|11\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) \\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

Ortogonalità fra Ψ^+ e Ψ^-

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^+ \middle| \Psi^- \right\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 01| + \langle 10|)(|01\rangle - |10\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 01|01\rangle - \langle 01|10\rangle + \langle 10|01\rangle - \langle 10|10\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) \\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

Ortogonalità fra stati di tipo Φ e Ψ

Per esempio:

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi^+ \middle| \Psi^+ \right\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 11|)(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|01\rangle + \langle 00|10\rangle + \langle 11|01\rangle + \langle 11|10\rangle\Big) \\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

Lo stesso calcolo vale per le altre combinazioni Φ/Ψ.

La base di Bell

Abbiamo mostrato che i quattro stati di Bell sono ortonormali:

$$\langle B_i | B_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Poiché lo spazio degli stati di due qubit ha dimensione 4, segue che

$$\boxed{\left\{ \left|\Phi^+\right\rangle, \left|\Phi^-\right\rangle, \left|\Psi^+\right\rangle, \left|\Psi^-\right\rangle \right\}}$$

è una base ortonormale.

La stessa coppia di qubit può essere descritta nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ oppure nella base di Bell.

$|\Phi^+\rangle$ è entangled: criterio

Per

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

abbiamo

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} ad - bc &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \neq 0}. \end{aligned}$$

Dunque $|\Phi^+\rangle$ non è separabile.

$|\Phi^+\rangle$ è entangled: tentativo di fattorizzazione

Supponiamo, per assurdo, che

$$\left|\Phi^+\right\rangle = (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes (\gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle).$$

Sviluppando:

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \alpha\gamma\,|00\rangle + \alpha\delta\,|01\rangle + \beta\gamma\,|10\rangle + \beta\delta\,|11\rangle\,.$$

Confrontando con

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\,,$$

otteniamo quattro condizioni.

$|\Phi^+\rangle$ è entangled: contraddizione

Le condizioni sono

$$\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha\delta = 0,$$

$$\beta\gamma = 0, \qquad \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dalla prima segue

$$\alpha \neq 0, \qquad \gamma \neq 0.$$

Poiché $\alpha\delta = 0$ e $\alpha \neq 0$, deve essere $\delta = 0$. Ma allora

$$\beta\delta = 0,$$

in contraddizione con $\beta\delta = 1/\sqrt{2}$.

La fattorizzazione è impossibile.

Misura dei due qubit di $\left|\Phi^+\right\rangle$

Consideriamo

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Nella base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ le ampiezze sono

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{01} = a_{10} = 0.$$

Quindi

$$p(00) = p(11) = \frac{1}{2}, \qquad p(01) = p(10) = 0.$$

Casualità locale e correlazione globale

Per $|\Phi^+\rangle$, una misura dei due qubit può dare solo

$$00 \qquad \text{oppure} \qquad 11.$$

Ciascun risultato singolo è casuale:

$$p(00) = p(11) = \frac{1}{2}.$$

Ma i due risultati sono perfettamente correlati:

se il primo qubit vale 0, allora anche il secondo vale 0,

se il primo qubit vale 1, allora anche il secondo vale 1.

Proiettore su uno stato di due qubit

Per un singolo stato normalizzato:

$$P_u = |u\rangle\langle u| \,.$$

Se lo stato di due qubit è un prodotto

$$|uv\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle \,,$$

il proiettore su $|uv\rangle$ è

$$\begin{aligned} P_{uv} &= |uv\rangle \langle uv| \\ &= (|u\rangle \otimes |v\rangle)(\langle u| \otimes \langle v|) \\ &= (|u\rangle\langle u|) \otimes (|v\rangle\langle v|) \\ &= \boxed{P_u \otimes P_v}. \end{aligned}$$

I quattro proiettori della base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

Nella base ordinata $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$P_{00} = |00\rangle\langle 00| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{01} = |01\rangle\langle 01| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{10} = |10\rangle\langle 10| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{11} = |11\rangle\langle 11| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Completezza dei proiettori di un qubit

Per un singolo qubit:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|\,, \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|\,.$$

In forma matriciale:

$$P_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Quindi

$$P_0 + P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I}.$$

Misurare solo il primo qubit

Il proiettore

$$P_{11} = |11\rangle\langle 11|$$

seleziona solo lo stato $|11\rangle$: richiede che entrambi i qubit siano nello stato 1.
Se invece la domanda è soltanto:

il primo qubit vale 1?

non dobbiamo distinguere il valore del secondo qubit. Dobbiamo quindi includere entrambi i casi:

$$|10\rangle \qquad \text{e} \qquad |11\rangle\,.$$

Per questo il proiettore cercato non è P_{11}, ma

$$\boxed{P_1^{(A)} = P_{10} + P_{11}.}$$

Riduzione del proiettore: calcolo

Usando

$$P_{10} = P_1 \otimes P_0, \qquad P_{11} = P_1 \otimes P_1,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} P_1^{(A)} &= P_{10} + P_{11} \\ &= P_1 \otimes P_0 + P_1 \otimes P_1 \\ &= P_1 \otimes (P_0 + P_1) \\ &= \boxed{P_1 \otimes I}. \end{aligned}$$

Sommiamo sui possibili stati del secondo qubit perché la misura riguarda solo il primo.

Esempio matriciale: primo qubit uguale a 1

$$P_{10} + P_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$P_1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Misura del primo qubit

Se misuriamo soltanto il primo qubit, il proiettore associato all'esito 0 è

$$\boxed{P_0^{(A)} = P_{00} + P_{01} = P_0 \otimes I.}$$

Esplicitamente:

$$P_0^{(A)} = (|0\rangle\langle 0| \otimes I).$$

Applicandolo allo stato entangled:

$$P_0^{(A)} \left|\Phi^+\right\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes I)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Azione di $P_0^{(A)}$ su $|00\rangle$

Calcoliamo il primo termine:

$$\begin{aligned}(|0\rangle\langle 0| \otimes I)\,|00\rangle &= (|0\rangle\langle 0|\,|0\rangle) \otimes (I\,|0\rangle) \\ &= |0\rangle\,\langle 0|0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \boxed{|00\rangle}.\end{aligned}$$

Azione di $P_0^{(A)}$ su $|11\rangle$

Calcoliamo il secondo termine:

$$\begin{aligned}(|0\rangle\langle 0| \otimes I)\,|11\rangle &= (|0\rangle\langle 0|\,|1\rangle) \otimes (I\,|1\rangle) \\ &= |0\rangle\,\langle 0|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |0\rangle \cdot 0 \otimes |1\rangle \\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

Il proiettore seleziona solo la componente compatibile con l'esito misurato.

Probabilità dell'esito 0 sul primo qubit

Dalle due azioni precedenti:

$$P_0^{(A)} \left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La probabilità è la norma quadrata del vettore proiettato:

$$\begin{aligned} p(0) &= \left\| P_0^{(A)} \left|\Phi^+\right\rangle \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} \right\|^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Stato dopo la misura: esito 0

Dalla proiezione precedente:

$$P_0^{(A)} \left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad p(0) = \frac{1}{2}.$$

Il vettore proiettato non è ancora normalizzato. Lo stato dopo la misura è

$$|\psi_0\rangle = \frac{P_0^{(A)} |\Phi^+\rangle}{\sqrt{p(0)}}.$$

Quindi

$$|\psi_0\rangle = \frac{|00\rangle / \sqrt{2}}{\sqrt{1/2}} = \boxed{|00\rangle}.$$

Esito 0: lo stato entangled iniziale diventa lo stato prodotto $|00\rangle$.

Stato dopo la misura: esito 1

Per l'altro esito usiamo

$$P_1^{(A)} = P_1 \otimes I.$$

Applicandolo allo stato di Bell:

$$\begin{aligned} P_1^{(A)} \left|\Phi^+\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(P_1 \otimes I)\,|00\rangle + (P_1 \otimes I)\,|11\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(0 + |11\rangle\big) = \frac{|11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Poiché $p(1) = 1/2$, dopo normalizzazione:

$$|\psi_1\rangle = \frac{|11\rangle / \sqrt{2}}{\sqrt{1/2}} = \boxed{|11\rangle}.$$

Misura locale e correlazione

Prima della misura, il primo qubit di

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

dà risultati casuali:

$$p(0) = p(1) = \frac{1}{2}.$$

Dopo avere osservato il primo qubit, però, lo stato complessivo è fissato:

$$0 \Rightarrow |00\rangle\,, \qquad 1 \Rightarrow |11\rangle\,.$$

Quindi una misura successiva del secondo qubit nella stessa base dà

$$P(B = 0 \mid A = 0) = 1, \qquad P(B = 1 \mid A = 1) = 1.$$

Risultato locale casuale; risultati congiunti perfettamente correlati.

Entanglement e correlazione classica non sono la stessa cosa

Lo stato entangled

$$\left|\Phi^{+}\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

non descrive una coppia che è semplicemente già 00 oppure già 11. Contiene una relazione di fase coerente fra le due componenti:

$$|00\rangle \qquad \text{e} \qquad |11\rangle\,.$$

Che cosa significa entanglement

L'entanglement non va definito come

"correlazione molto forte".

La definizione corretta è

$$\boxed{\text{entanglement} = \text{non separabilità dello stato.}}$$

Per due qubit:

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle\,,$$

$$\boxed{ad - bc \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle \text{ entangled.}}$$

Richiamo: da due a n qubit

Un sistema di n qubit ha uno spazio degli stati di dimensione

$$\boxed{2^n.}$$

Uno stato generale ha la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \alpha_x |x\rangle ,$$

con

$$\sum_x |\alpha_x|^2 = 1.$$

Il numero di ampiezze cresce esponenzialmente con il numero di qubit.