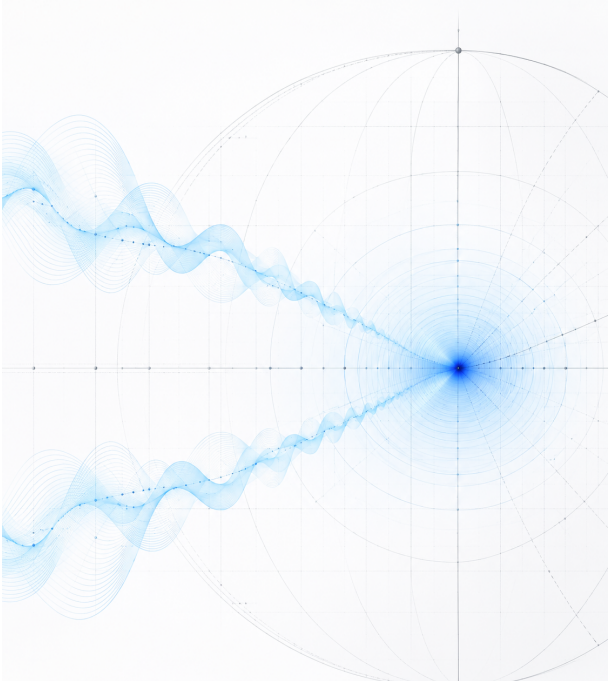
LEZIONE 16

Lettura, equivalenza e progettazione dei circuiti quantistici

Dal diagramma alla sintesi di un circuito

Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari



Obiettivi della lezione

Il capitolo 6 ha già definito porte, operatori, misura e risorse: **non li ridefiniamo**.

1. **Leggere** un circuito come prodotto ordinato di operatori.
2. **Verificare equivalenze** su tutti gli ingressi, non soltanto su uno.
3. **Riordinare e decomporre** senza alterare la trasformazione.
4. **Progettare** un diagramma a partire da specificazioni e vincoli.

Specificazione $\longleftrightarrow$ diagramma $\longleftrightarrow$ operatore $\longleftrightarrow$ verifica

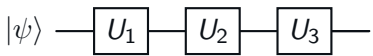
Il metodo di lavoro

Per ogni circuito seguiremo tre domande distinte.

1. **Che cosa rappresenta?** Individuare wire, controlli, bersagli e ordine delle porte.
2. **Che cosa realizza?** Costruire l'operatore e calcolare gli stati quando necessario.
3. **Si può trasformare?** Verificare uguaglianza, commutazione o identità di decomposizione.

Non basta riconoscere i simboli: bisogna giustificare l'operazione che il circuito compie.

Wire e ordine temporale



Il tempo procede **da sinistra verso destra**. Il prodotto degli operatori si scrive in ordine inverso:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{U_1} U_1|\psi\rangle \xrightarrow{U_2} U_2U_1|\psi\rangle \xrightarrow{U_3} U_3U_2U_1|\psi\rangle\,.$$

$$\boxed{U_{\text{tot}} = U_3U_2U_1}$$

Una wire identifica un qubit logico, non la traiettoria spaziale di una particella.

Posizione verticale e controlli

Controllo superiore



$C_{0\to 1}$

Controllo inferiore

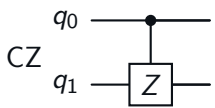


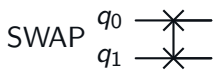
$C_{1\to 0}$

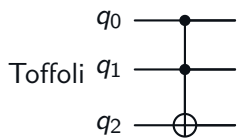
$$C_{0\to 1}\,|01\rangle = |01\rangle\,, \qquad C_{1\to 0}\,|01\rangle = |11\rangle\,.$$

I due diagrammi non rappresentano lo stesso operatore.

Tre simboli da riconoscere



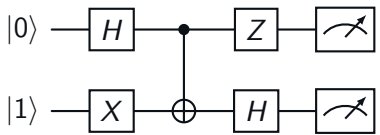




- La CZ è una porta a due qubit; la SWAP scambia le wire logiche.
- La Toffoli ha **due controlli**; il bersaglio si inverte solo quando entrambi valgono 1.

Le trasformazioni algebriche sono quelle del §6.4 della dispensa.

Dalle colonne al prodotto tensoriale



I tre livelli unitari sono

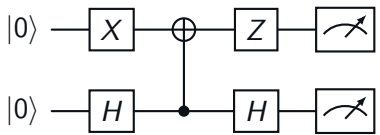
$$U_1 = H \otimes X, \qquad U_2 = C_{0\to 1}, \qquad U_3 = Z \otimes H.$$

Pertanto, **prima delle misure**,

$$\boxed{U = (Z \otimes H)\, C_{0\to 1}\, (H \otimes X).}$$

La posizione verticale determina quale fattore agisce su quale qubit.

Un circuito completo: lettura



$$U_1 = X \otimes H, \quad U_2 = C_{1\to 0}, \quad U_3 = Z \otimes H.$$

$$\boxed{U_{\text{tot}} = (Z \otimes H)\, C_{1\to 0}\, (X \otimes H).}$$

La seconda porta è controllata da q_1, cioè dalla wire inferiore.

Un circuito completo: primi livelli

Partiamo da $|\psi_0\rangle = |00\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= (X \otimes H)\,|00\rangle \\ &= |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La CNOT con controllo inferiore agisce separatamente:

$$|10\rangle \mapsto |10\rangle\,, \qquad |11\rangle \mapsto |01\rangle\,.$$

Quindi

$$\boxed{|\psi_2\rangle = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}.}$$

Un circuito completo: stato finale

L'ultimo livello è $Z \otimes H$. Calcoliamo le due componenti:

$$(Z \otimes H)\,|10\rangle = -\frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},$$
$$(Z \otimes H)\,|01\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Per linearità,

$$|\psi_3\rangle = (Z \otimes H)\frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$= \boxed{\frac{|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle}{2}}.$$

I quattro esiti della misura completa hanno probabilità $1/4$ ciascuno.

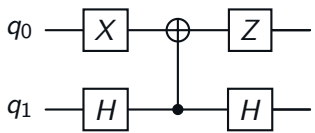
La lettura inversa

Dato l'operatore

$$U = (Z \otimes H)\, C_{1\to 0}\, (X \otimes H),$$

la costruzione del diagramma procede **da destra verso sinistra nel prodotto**:

1. Disegnare X su q_0 e H su q_1.
2. Disegnare la CNOT con **controllo sulla wire inferiore**.
3. Disegnare Z su q_0 e H su q_1.



Tre nozioni di equivalenza

1. **Uguaglianza esatta**: $U_A = U_B$ su tutti gli ingressi.
2. **Equivalenza a fase globale**: $U_B = e^{i\phi} U_A$ con ϕ indipendente dall'ingresso.
3. **Stesse probabilità per una misura**: condizione ancora più debole.

In generale,

$$U_A |00\rangle = U_B |00\rangle \quad \not\Rightarrow \quad U_A = U_B.$$

Per sostituire un sottocircuito bisogna sapere *quale* equivalenza si sta usando.

Un ingresso non basta

Confrontiamo due circuiti costituiti rispettivamente da I e da Z.



Sul solo ingresso $|0\rangle$:

$$I|0\rangle = Z|0\rangle = |0\rangle\,.$$

Ma sull'ingresso $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$,

$$I|+\rangle = |+\rangle\,, \qquad Z|+\rangle = |-\rangle\,.$$

Le due porte non realizzano lo stesso operatore.

Equivalenza a fase globale

Se $U_B = e^{i\phi} U_A$, allora, per ogni $|\psi\rangle$,

$$|\psi_B\rangle = e^{i\phi} |\psi_A\rangle .$$

Per una misura descritta dal proiettore P_m,

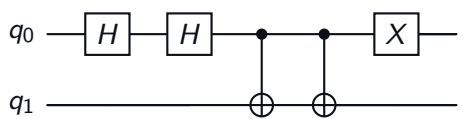
$$\begin{aligned} p_B(m) &= \langle\psi_B| P_m |\psi_B\rangle \\ &= e^{-i\phi} e^{i\phi} \langle\psi_A| P_m |\psi_A\rangle \\ &= p_A(m). \end{aligned}$$

La fase **globale** non cambia le probabilità di misura.Diverso è il caso delle fasi relative tra componenti di una sovrapposizione.

Identità locali e cancellazioni

Una porzione di circuito può essere sostituita con un'altra se la trasformazione complessiva rimane invariata.

$$H^2 = X^2 = Z^2 = I, \qquad C^2_{0\to 1} = I.$$



$$U_{\text{tot}} = (X \otimes I)\, C^2_{0\to 1}\, (H^2 \otimes I) = \boxed{X \otimes I}.$$

Cancellazione: il controllo conta

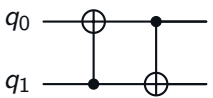
Per le CNOT consecutive è essenziale mantenere *identico* l'orientamento:

$$C_{0\to1}\,C_{0\to1} = I.$$

Non è vero che $C_{0\to1}\,C_{1\to0} = I$. Basta un controesempio:

$$|01\rangle \xrightarrow{C_{1\to0}} |11\rangle \xrightarrow{C_{0\to1}} |10\rangle\,.$$

Poiché il risultato non è $|01\rangle$, il prodotto non è l'identità.

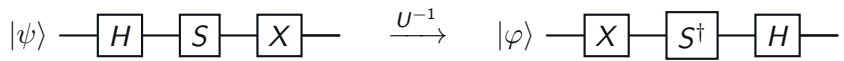


Inversione di un circuito

Se $U = U_m \cdots U_2 U_1$, allora

$$\boxed{U^{-1} = U_1^{-1} U_2^{-1} \cdots U_m^{-1}}.$$

Servono **due operazioni**: invertire le singole porte e invertirne l'ordine grafico.



$$U = XSH, \qquad U^{-1} = HS^\dagger X.$$

Verifica dell'inversione

$$U = XSH, \qquad U^{-1} = HS^{\dagger}X.$$

La composizione nell'ordine corretto è

$$\begin{aligned} U^{-1}U &= (HS^{\dagger}X)(XSH) \\ &= HS^{\dagger}(XX)SH \\ &= H(S^{\dagger}S)H \\ &= HH = \boxed{I}. \end{aligned}$$

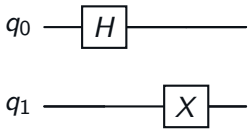
Le cancellazioni sono possibili perché i fattori inversi sono adiacenti.

Porte indipendenti

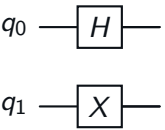
Operazioni su wire *disgiunte* commutano:

$$(A \otimes I)(I \otimes B) = A \otimes B = (I \otimes B)(A \otimes I).$$

Due colonne



Una colonna



Entrambi i diagrammi realizzano $H \otimes X$.

Porte controllate: una cautela

Una CNOT coinvolge **due** wire, anche se il controllo è indicato soltanto da un punto.Una X sul controllo *non* commuta con la CNOT:

$$C_{0\to 1}(X \otimes I)\,|00\rangle = C_{0\to 1}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$(X \otimes I)C_{0\to 1}\,|00\rangle = (X \otimes I)\,|00\rangle = |10\rangle\,.$$

$$\boxed{C_{0\to 1}(X \otimes I) \neq (X \otimes I)C_{0\to 1}.}$$

Un solo ingresso con uscite diverse basta per **smentire** un'equivalenza.

Due casi di commutazione valida

La Z sul controllo commuta con la CNOT. Per ogni $a, b \in \{0, 1\}$:

$$C_{0\to1}(Z \otimes I)\,|ab\rangle = (-1)^a\,|a, b \oplus a\rangle\,,$$
$$(Z \otimes I)C_{0\to1}\,|ab\rangle = (-1)^a\,|a, b \oplus a\rangle\,.$$

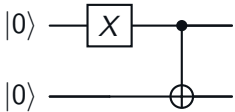
Quindi

$$\boxed{[C_{0\to1}, Z \otimes I] = 0.}$$

Analogamente $C_{0\to1}$ commuta con $I \otimes X$: le inversioni sul bersaglio si combinano tramite XOR e l'ordine non cambia il risultato.

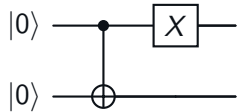
Quando il riordinamento fallisce

Prima X, poi CNOT



$|00\rangle \to |10\rangle \to |11\rangle$

Prima CNOT, poi X



$|00\rangle \to |00\rangle \to |10\rangle$

Spostare una porta attraverso un controllo richiede una verifica algebrica.

Decomporre una porta

Problema: la trasformazione desiderata è nota, ma la piattaforma offre un insieme limitato di porte.**Metodo**:

1. Specificare la porta U da realizzare.
2. Scegliere un prodotto di porte disponibili $V_m \cdots V_1$.
3. Verificare $U = V_m \cdots V_1$ su tutto lo spazio degli ingressi.
4. Confrontare numero di porte e livelli circuitali.

Una decomposizione è una *identità di operatori*, non una somiglianza fra disegni.

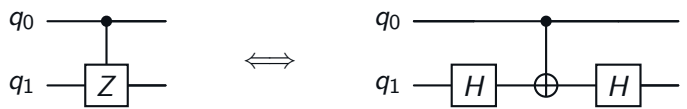
CZ come circuito H–CNOT–H

Dal §6.4 sappiamo che

$$C_{0\to 1} = (I \otimes H)\,\mathrm{CZ}\,(I \otimes H).$$

Poiché $H^2 = I$, segue

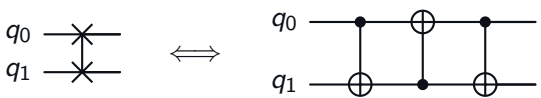
$$\boxed{\mathrm{CZ} = (I \otimes H)\,C_{0\to 1}\,(I \otimes H).}$$



SWAP con tre CNOT

Se non è disponibile una SWAP nativa:

$$\boxed{\mathrm{SWAP} = C_{0\to1}\, C_{1\to0}\, C_{0\to1}.}$$



Verifica richiesta: mostrare che $|a, b\rangle \mapsto |b, a\rangle$ per *ogni* coppia $a, b \in \{0, 1\}$.

SWAP: verifica algebrica, passo 1

Partiamo dall'ingresso arbitrario $|a, b\rangle$, dove a, b valgono 0 oppure 1.La prima CNOT ha controllo sul primo qubit:

$$|a, b\rangle \xrightarrow{C_{0\to 1}} |a, b \oplus a\rangle \,.$$

La seconda CNOT inverte i ruoli, con controllo inferiore:

$$|a, b \oplus a\rangle \xrightarrow{C_{1\to 0}} |a \oplus (b \oplus a), b \oplus a\rangle$$

$$= \boxed{|b, b \oplus a\rangle}.$$

Abbiamo usato $a \oplus a = 0$ e l'associatività della XOR.

SWAP: verifica algebrica, passo 2

Dopo la seconda CNOT lo stato è $|b, b \oplus a\rangle$.La terza CNOT ha di nuovo controllo superiore:

$$|b, b \oplus a\rangle \xrightarrow{C_{0\to1}} |b, (b \oplus a) \oplus b\rangle$$

$$= \boxed{|b, a\rangle}.$$

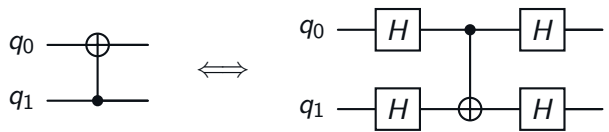
La dimostrazione vale su tutti gli stati della base e quindi, per linearità, su ogni sovrapposizione.

$$\boxed{C_{0\to1}\, C_{1\to0}\, C_{0\to1} = \mathrm{SWAP}.}$$

Invertire il controllo di una CNOT

Si vuole realizzare $C_{1\to 0}$ usando soltanto $C_{0\to 1}$ e Hadamard.

$$\boxed{C_{1\to 0} = (H \otimes H)\, C_{0\to 1}\, (H \otimes H).}$$



Non stiamo scambiando fisicamente i qubit: cambia l'azione logica della CNOT.

Controllo invertito: verifica

Usiamo l'identità nota $C_{0\to1} = (I \otimes H)\mathrm{CZ}(I \otimes H)$.

$$\begin{aligned}
&(H \otimes H) C_{0\to1} (H \otimes H) \\
&\quad = (H \otimes H)(I \otimes H)\mathrm{CZ}(I \otimes H)(H \otimes H) \\
&\quad = (H \otimes I)\mathrm{CZ}(H \otimes I) \\
&\quad = \boxed{C_{1\to0}}.
\end{aligned}$$

Abbiamo verificato l'equivalenza esatta degli operatori, non solo di un particolare ingresso.

Gate count e profondità

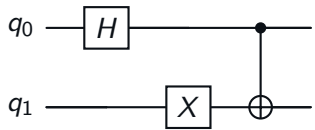
Due risorse circuitali distinte, già definite nel §6.10:

- **Gate count**: numero complessivo di porte.
- **Depth**: numero di livelli sequenziali dopo aver parallelizzato le porte compatibili.

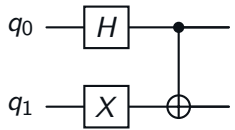
Una *colonna disegnata* non coincide necessariamente con un *livello minimo*.Due porte che operano su wire indipendenti possono occupare lo stesso livello. Una porta a due qubit occupa entrambe le wire e crea dipendenze.

Tre colonne non significano depth tre

Disegno iniziale



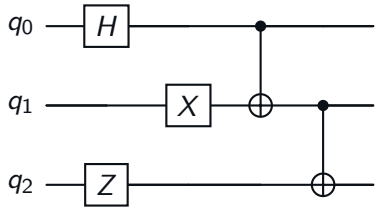
Riordinato



Gate count $= 3$, $\boxed{\text{Depth minima} = 2}$.

L'operatore rimane $C_{0\to1}(H \otimes X)$.

Tre qubit: riconoscere le dipendenze



1. H su q_0, X su q_1 e Z su q_2: primo livello.
2. CNOT $C_{0\to1}$: secondo livello.
3. CNOT $C_{1\to2}$: terzo livello.

$$\boxed{\text{Gate count} = 5, \qquad \text{Depth} = 3.}$$

Le due CNOT non possono essere parallele: condividono q_1.

Profondità logica e tempo fisico

La depth calcolata dal diagramma è una proprietà del **circuito astratto**.Non equivale automaticamente al tempo di esecuzione sul dispositivo:

- Porte differenti possono richiedere tempi diversi.
- Non tutte le coppie di qubit possono essere direttamente connesse.
- L'inserimento di SWAP può aumentare gate count e depth.

Qui ottimizziamo il diagramma logico; non stiamo ancora progettando il layout fisico del chip.

Progettazione: un problema inverso

Quando *leggiamo*, partiamo dal circuito e troviamo l'operatore.Quando *progettiamo*, partiamo dall'operazione richiesta:

$$\boxed{\text{specificazione} \longrightarrow \text{porte} \longrightarrow \text{diagramma.}}$$

Ogni esercizio di progettazione richiede:

1. **Specificazione**: trasformazione richiesta, su uno stato o su tutti gli ingressi?
2. **Vincoli**: porte disponibili e connessioni consentite.
3. **Verifica**: prova algebrica o sugli stati della base.

Progettare una SWAP senza SWAP nativa

Specificazione: realizzare $|a, b\rangle \mapsto |b, a\rangle$ per ogni a, b.**Vincolo**: soltanto CNOT fra le due wire.



Verifica:

$$(a, b) \to (a, b \oplus a) \to (b, b \oplus a) \to (b, a).$$

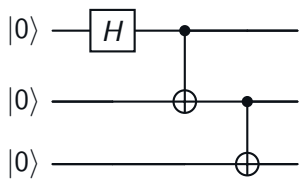
3 CNOT, profondità 3.

Progettare uno stato GHZ

Specificazione: da $|000\rangle$ ottenere

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Costruzione:

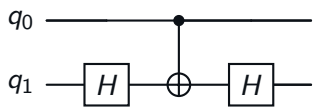


Verifica:

$$|000\rangle \to \frac{|000\rangle + |100\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + |110\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Progettare una fase condizionata

Specificazione: applicare un segno $-$ soltanto alla componente $|11\rangle$, cioè realizzare CZ.**Vincolo**: sono disponibili soltanto H e $C_{0\to 1}$.



Verifica:

$$(I \otimes H)\, C_{0\to 1}\, (I \otimes H) = \mathrm{CZ}.$$

L'uguaglianza degli operatori garantisce la trasformazione su ogni sovrapposizione.

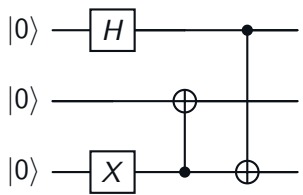
Esercizi: sei problemi circuitali

Il §7.8 della rev03 propone **sei esercizi svolti**, non ripassi delle singole porte:

1. Controllo non adiacente in tre qubit.
2. Equivalenza delle CNOT con controllo invertito.
3. Verificare un riordinamento di porte.
4. Costruire l'inverso di un circuito.
5. Ridurre la profondità senza violare le dipendenze.
6. Preparare uno stato con fase relativa richiesta.

7.8.1

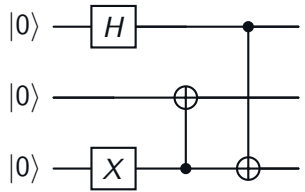
Testo. Un registro di tre qubit è inizializzato nello stato $|000\rangle$ ed e sottoposto al circuito seguente. Il controllo dell'ultima CNOT agisce su due wire non adiacenti.



Domande. (a) Individuare controllo e bersaglio di ciascuna CNOT. (b) Scrivere gli operatori dei tre livelli e il loro prodotto ordinato. (c) Determinare lo stato finale, mostrando tutti gli stati intermedi.

7.8.1

Richiesta: individuare tutte le operazioni e calcolare lo stato finale.



I tre livelli sono:

$$U_1 = H \otimes I \otimes X, \quad U_2 = C_{2\to 1}, \quad U_3 = C_{0\to 2}.$$

$$\boxed{U = C_{0\to 2} C_{2\to 1} (H \otimes I \otimes X).}$$

7.8.1

Iniziamo da $|000\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= (H \otimes I \otimes X)\,|000\rangle \\ &= \frac{|001\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Secondo livello: il controllo è $q_2 = 1$ in entrambe le componenti.

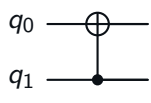
$$|\psi_2\rangle = \frac{|011\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Terzo livello: il controllo non adiacente è q_0.

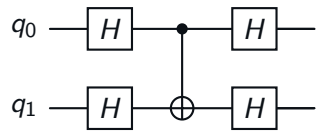
$$\boxed{|\psi_3\rangle = \frac{|011\rangle + |110\rangle}{\sqrt{2}}.}$$

7.8.2

Testo. Si considerino due circuiti a due qubit: il primo applica una CNOT controllata dalla wire inferiore; il secondo applica due Hadamard, una CNOT con controllo superiore e altre due Hadamard.



e

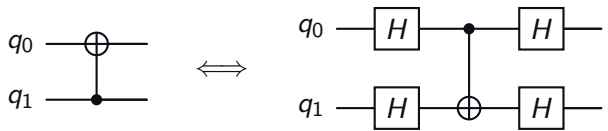


Domande. (a) Scrivere l'operatore di ciascun circuito. (b) Stabilire se i due operatori coincidono su *ogni* stato di ingresso, verificandone l'azione sui quattro stati della base computazionale. (c) Spiegare perché un solo ingresso non basta a dimostrare l'equivalenza.

7.8.2

Verificare che due diagrammi siano equivalenti:

$$C_{1\to 0} \stackrel{?}{=} (H \otimes H) C_{0\to 1} (H \otimes H).$$



Attenzione: verificare soltanto $|00\rangle$ non è sufficiente a stabilire un'equivalenza di operatori.

7.8.2

L'identità dimostrata nella sezione sulla decomposizione assicura l'uguaglianza degli operatori. L'azione comune sulla base è:

Ingresso	Uscita di $C_{1\to 0}$
$\lvert 00\rangle$	$\lvert 00\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$\lvert 11\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$\lvert 10\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$\lvert 01\rangle$

$$(H \otimes H) C_{0\to 1} (H \otimes H) = C_{1\to 0}.$$

Per linearità l'uguaglianza vale anche su qualunque sovrapposizione.

7.8.3

Testo. Una CNOT ha il qubit superiore come controllo e quello inferiore come bersaglio. Si vorrebbe spostare una porta applicata sul qubit di controllo da prima a dopo la CNOT, senza cambiare l'operazione complessiva.

$$A = C_{0\to 1}(X \otimes I), \qquad B = (X \otimes I)C_{0\to 1}.$$

Domande. (a) I due circuiti A e B sono equivalenti? Basta trovare un solo ingresso per cui gli stati di uscita siano diversi. (b) Ripetere il confronto sostituendo X con Z sul controllo. (c) Stabilire in quale dei due casi il riordinamento è consentito.

7.8.3

Confrontiamo i due operatori

$$A = C_{0\to1}(X \otimes I), \qquad B = (X \otimes I)C_{0\to1}.$$

Verifica su un ingresso:

$$A\,|00\rangle = C_{0\to1}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$B\,|00\rangle = (X \otimes I)\,|00\rangle = |10\rangle\,.$$

$$\boxed{A \neq B.}$$

La porta X sul controllo **non** può essere spostata attraverso la CNOT.

7.8.3

Sostituiamo X con Z sul controllo. Per $a \in \{0,1\}$,

$$Z\,|a\rangle = \begin{cases} |0\rangle\,, & a=0,\\ -\,|1\rangle\,, & a=1, \end{cases} = (-1)^a\,|a\rangle\,.$$

Dalla definizione del prodotto tensoriale segue, per ogni $b \in \{0,1\}$,

$$\boxed{(Z\otimes I)\,|ab\rangle = (Z\,|a\rangle)\otimes(I\,|b\rangle) = (-1)^a\,|ab\rangle\,.}$$

Confrontiamo i due ordini di applicazione:

$$C_{0\to1}(Z\otimes I)\,|ab\rangle = C_{0\to1}\big[(-1)^a\,|ab\rangle\big] = (-1)^a\,|a, b\oplus a\rangle\,,$$

$$(Z\otimes I)C_{0\to1}\,|ab\rangle = (Z\otimes I)\,|a, b\oplus a\rangle = (-1)^a\,|a, b\oplus a\rangle\,.$$

La CNOT conserva il controllo a: il fattore di fase non cambia. Per linearità, le due operazioni commutano:

$$\boxed{C_{0\to1}(Z\otimes I) = (Z\otimes I)C_{0\to1}.}$$

7.8.3 — Tabella completa

Usiamo le due regole appena ricavate:

$$(Z \otimes I)\,|ab\rangle = (-1)^a\,|ab\rangle\,, \qquad C_{0\to 1}\,|ab\rangle = |a, b \oplus a\rangle\,.$$

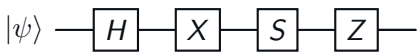
La verifica esplicita sui quattro stati della base fornisce:

Ingresso	$(Z \otimes I)\,\lvert ab\rangle$	$C_{0\to 1}(Z \otimes I)\,\lvert ab\rangle$	$(Z \otimes I)C_{0\to 1}\,\lvert ab\rangle$
$\lvert 00\rangle$	$\lvert 00\rangle$	$\lvert 00\rangle$	$\lvert 00\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$\lvert 01\rangle$	$\lvert 01\rangle$	$\lvert 01\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$-\lvert 10\rangle$	$-\lvert 11\rangle$	$-\lvert 11\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$-\lvert 11\rangle$	$-\lvert 10\rangle$	$-\lvert 10\rangle$

Le ultime due colonne coincidono per tutti e quattro gli ingressi: **gli operatori commutano** anche su qualsiasi sovrapposizione.

7.8.4

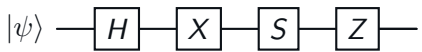
Testo. Un qubit attraversa, da sinistra verso destra, le porte H, X, S e Z:



Si desidera costruire un secondo circuito che riporti *qualunque* stato finale all'ingresso originale. **Domande.** (a) Scrivere l'operatore U del circuito. (b) Determinare U^{-1}, ricordando che si invertono sia l'ordine sia le singole porte. (c) Disegnare il circuito inverso e verificare algebricamente che $U^{-1}U = I$.

7.8.4

Il circuito applica, nell'ordine, H, X, S, Z:



$$U = ZSXH.$$

Per inversione di un prodotto,

$$\boxed{U^{-1} = HXS^{\dagger}Z.}$$

Diagramma inverso (ordine da sinistra a destra):



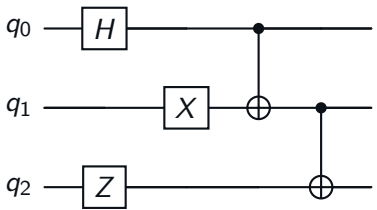
7.8.4

$$\begin{aligned} U^{-1}U &= (HXS^\dagger Z)(ZSXH) \\ &= HXS^\dagger(ZZ)SXH \\ &= HX(S^\dagger S)XH \\ &= H(XX)H \\ &= \boxed{I}. \end{aligned}$$

Non abbiamo scambiato porte non commutanti: abbiamo cancellato coppie inverse adiacenti.

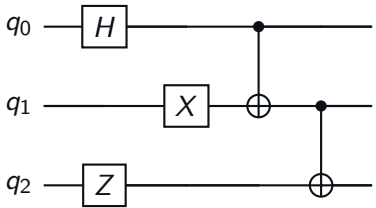
7.8.5

Testo. Un circuito a tre qubit applica H su q_0, X su q_1, Z su q_2 e, successivamente, due CNOT: $q_0 \to q_1$ e $q_1 \to q_2$.



Domande. (a) Contare le porte. (b) Proporre un diagramma equivalente con il minor numero di livelli possibile, senza cambiare l'ordine delle due CNOT. (c) Giustificare il valore minimo della profondità e indicare quali porte possono stare in parallelo.

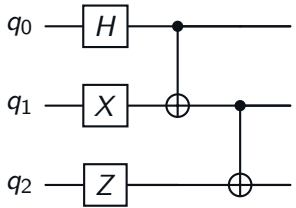
7.8.5



Richiesta: ridurre il numero di livelli senza alterare il circuito.Le porte H, X, Z sono indipendenti, ma le CNOT condividono la wire q_1.

$$\text{Gate count} = 5.$$

7.8.5



Livello 1: H, X e Z su wire distinte.
Livello 2: CNOT $C_{0\to 1}$.
Livello 3: CNOT $C_{1\to 2}$.

$$\boxed{\text{Depth} = 3, \qquad \text{Gate count} = 5.}$$

Non è possibile mettere le due CNOT nello stesso livello: entrambe impegnano q_1.

7.8.6

Testo. Si dispone di due qubit inizializzati in $|00\rangle$ e soltanto delle porte H, CNOT e Z. Si vuole preparare lo stato entangled

$$|\psi_{\text{obiettivo}}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Domande. (a) Progettare un circuito che produca esattamente questo stato, inclusa la fase relativa negativa. (b) Indicare controllo e bersaglio della CNOT e su quale wire applicare Z. (c) Calcolare lo stato dopo ciascuna porta e verificare che coincida con lo stato obiettivo.

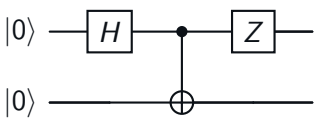
Non basta produrre le probabilità $P(00) = P(11) = 1/2$: occorre ottenere anche il segno relativo richiesto.

7.8.6

Specificazione: da $|00\rangle$ preparare

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

utilizzando H, CNOT e Z.**Costruzione**:



L'ultima Z deve agire sul qubit superiore per cambiare il segno della componente $|11\rangle$.

7.8.6

Dopo la Hadamard sul primo qubit:

$$|\psi_1\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Dopo la CNOT con controllo superiore:

$$|\psi_2\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Dopo la porta Z sul primo qubit:

$$|\psi_3\rangle = (Z \otimes I)\,|\psi_2\rangle = \boxed{\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}}.$$

Abbiamo preparato lo stato richiesto da un ingresso fissato.