CAPITOLO 5 · PRESENTAZIONE CONTINUA

Metodi della Fisica Quantistica per l'Ingegneria

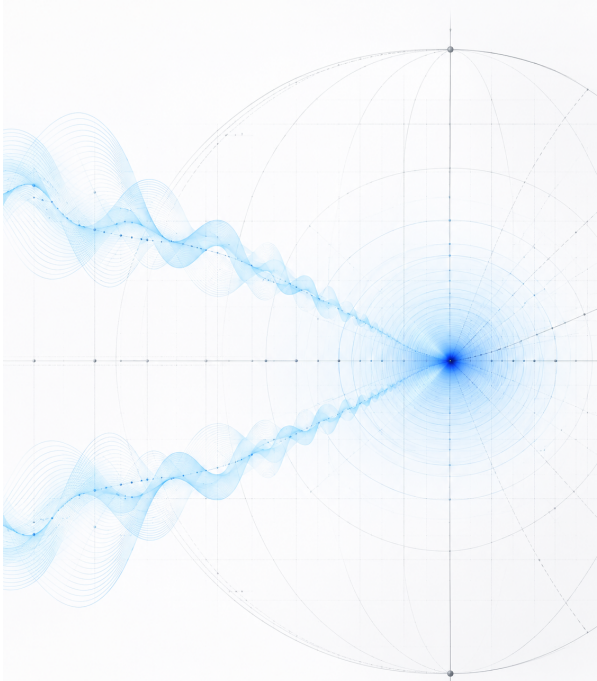
Misura e informazione quantistica

Osservabili, incertezza e no-cloning

Stati misti ed evoluzione di sistemi aperti

Prof. Vincenzo Berardi · Politecnico di Bari

Revisione didattica: 23 ottobre 2026



Che cosa aggiunge il capitolo 5

Abbiamo già costruito qubit, sfera di Bloch, sistemi composti ed entanglement.

Ora serve un formalismo generale per quattro problemi:

misura osservabili limiti sull'informazione sistemi aperti.

Richiamo essenziale: stato in una base

Se $\{|u_1\rangle, \ldots, |u_d\rangle\}$ è una base ortonormale, uno stato puro normalizzato si scrive

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{d} c_k |u_k\rangle}, \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{d} |c_k|^2 = 1.}$$

L'indice k identifica i vettori della base e i relativi coefficienti.

Esempio: tre qubit ($n = 3$, $d = 2^3 = 8$). Nella base computazionale:

$$|\psi\rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^3} c_x |x\rangle .$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = {} & c_{000}|000\rangle + c_{001}|001\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{011}|011\rangle \\ & + c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{111}|111\rangle . \end{aligned}$$

Evoluzione e Misura

L'evoluzione di un sistema chiuso è unitaria:

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle\,, \qquad U^\dagger U = I.$$

Essa conserva prodotto interno e reversibilità:

$$\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\,, \qquad U^{-1} = U^\dagger.$$

La misura, invece, contiene due regole:

probabilità dell'esito e stato dopo l'esito.

Evoluzione e Misura

Sia

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{d} c_k \, |u_k\rangle \,, \qquad \sum_{k=1}^{d} |c_k|^2 = 1.$$

Una misura nella base $\{|u_k\rangle\}$ restituisce un **esito** $m \in \{1, \ldots, d\}$.

La regola di Born assegna

$$\boxed{p(m) = |c_m|^2 = |\,\langle u_m|\psi\rangle\,|^2.}$$

Se si osserva l'esito m, lo stato dopo la misura è $|u_m\rangle$, a meno di fase globale.

L'indice k scorre tutti i termini della somma; m indica invece il risultato effettivo.

Esempio: misura di un qubit

Consideriamo

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle\,.$$

Nella base computazionale:

$$p(0) = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}, \qquad p(1) = \left|\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}.$$

Dopo il risultato 0 lo stato è $|0\rangle$; dopo il risultato 1 lo stato è $|1\rangle$.

Proiettori e Misura

A un vettore normalizzato $|u\rangle$ associamo l'**operatore**

$$\boxed{P_u = |u\rangle \langle u| .}$$

Applicandolo a uno stato qualsiasi:

$$\underbrace{P_u |\psi\rangle}_{\text{vettore}} = \underbrace{|u\rangle}_{\text{vettore}} \underbrace{\langle u|\psi\rangle}_{\text{numero complesso}} .$$

Il prodotto interno $\langle u|\psi\rangle$ è l'**ampiezza di proiezione**: moltiplica il vettore $|u\rangle$. Se l'ampiezza è nulla, il risultato è il vettore nullo.

In una base ortonormale: $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$, $\sum_j P_j = I$.

Proiettori e Misura

Partiamo dal richiamo già visto:

$$A_{ij} = \langle e_i | \, A \, | e_j \rangle \, .$$

Ora prendiamo $A = P_j = |u_j\rangle \langle u_j|$ e lo stesso stato a sinistra e a destra:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \, P_j \, | \psi \rangle &= \langle \psi | \, (|u_j\rangle \langle u_j|) \, | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | u_j \rangle \langle u_j | \psi \rangle \\ &= | \langle u_j | \psi \rangle |^2 . \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{p(j) = \langle \psi | \, P_j \, | \psi \rangle \, .}$$

Sottospazi e Misura

Un **sottospazio** $\mathcal{S}$ di uno spazio di Hilbert è un insieme di vettori che è esso stesso uno spazio vettoriale: ogni combinazione lineare di vettori in $\mathcal{S}$ resta in $\mathcal{S}$.

Per due vettori ortonormali $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \text{span}\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}}$$

significa precisamente

$$\mathcal{S} = \{\alpha\,|u_1\rangle + \beta\,|u_2\rangle : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Non stiamo scegliendo *uno* dei due vettori: stiamo considerando *tutte* le loro combinazioni lineari.

Sottospazi e Misura

Se $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{S}$, allora

$$\boxed{P_{\mathcal{S}} = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2|.}$$

Per $|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + c_3|u_3\rangle$, con $|u_3\rangle$ ortogonale a $\mathcal{S}$, si ottiene

$$P_{\mathcal{S}}|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle.$$

Quindi il proiettore **conserva le componenti dentro il sottospazio** ed elimina quelle ortogonali. In una misura, un esito m può corrispondere a un intero sottospazio:

$$P_m = \sum_{k \in S_m} |u_k\rangle\langle u_k|, \qquad p(m) = \langle\psi| P_m |\psi\rangle.$$

Sottospazi e Misura

Una **misura proiettiva** è descritta da una famiglia di proiettori ortogonali che **risolve l'identità**:

$$\boxed{P_m P_n = \delta_{mn} P_m, \qquad \sum_m P_m = I.}$$

Le due condizioni significano che gli esiti sono mutuamente esclusivi e che l'insieme degli esiti possibili non lascia fuori alcuna componente. Pertanto, per ogni $|\psi\rangle$ normalizzato,

$$\begin{aligned}\sum_m p(m) &= \sum_m \langle\psi| P_m |\psi\rangle = \langle\psi| \left(\sum_m P_m\right) |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| I |\psi\rangle = 1.\end{aligned}$$

I proiettori non devono essere tutti di rango uno.

Sottospazi e Misura

Supponiamo che la misura proiettiva abbia restituito l'esito m. Prima di rinormalizzare, si applica P_m allo stato iniziale:

$$\boxed{\left|\widetilde{\psi}_m\right\rangle = P_m \left|\psi\right\rangle .}$$

Questo vettore contiene soltanto le componenti compatibili con l'esito m. La sua norma quadrata coincide con la probabilità dell'esito:

$$\begin{aligned} \left\| P_m \left|\psi\right\rangle \right\|^2 &= \left\langle\psi\right| P_m^\dagger P_m \left|\psi\right\rangle \\ &= \left\langle\psi\right| P_m^2 \left|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\right| P_m \left|\psi\right\rangle = p(m). \end{aligned}$$

Abbiamo usato $P_m^\dagger = P_m$ e $P_m^2 = P_m$.

Sottospazi e Misura

Dopo l'esito m resta la componente $P_m |\psi\rangle$, la cui norma è

$$\|P_m |\psi\rangle\| = \sqrt{p(m)}.$$

Questo vettore non è, in generale, normalizzato. Se $p(m) > 0$, per ottenere uno stato con norma uno dividiamo per $\sqrt{p(m)}$:

$$\boxed{|\psi_m\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.}$$

L'operazione seleziona il sottospazio associato all'esito e **rinormalizza** la componente selezionata. Se $p(m) = 0$, l'esito non può verificarsi e lo stato condizionato non è definito.

Sottospazi e Misura

Usiamo lo stato post-misura $|\psi_m\rangle = P_m|\psi\rangle / \sqrt{p(m)}$. La sua norma quadrata è

$$\begin{aligned}\langle\psi_m|\psi_m\rangle &= \frac{\langle\psi| P_m^\dagger P_m |\psi\rangle}{p(m)} \\ &= \frac{\langle\psi| P_m^2 |\psi\rangle}{p(m)} \\ &= \frac{\langle\psi| P_m |\psi\rangle}{p(m)} = \frac{p(m)}{p(m)} = \boxed{1}.\end{aligned}$$

Abbiamo usato $P_m^\dagger = P_m$, $P_m^2 = P_m$ e la regola di Born.

Esempio: misura della parità

Consideriamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle).$$

Misuriamo solo la parità:

$$P_{\text{pari}} = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|,$$

$$P_{\text{dispari}} = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|.$$

La misura distingue due sottospazi, non i quattro vettori della base computazionale.

Esempio: misura della parità

La componente pari è

$$P_{\text{pari}} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

La probabilità è

$$p(\text{pari}) = \|P_{\text{pari}} |\psi\rangle\|^2 = \frac{2}{3}.$$

Lo stato dopo l'esito pari è

$$|\psi_{\text{pari}}\rangle = \frac{P_{\text{pari}} |\psi\rangle}{\sqrt{p(\text{pari})}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Esempio: misura della parità

Dopo l'esito m, lo stato è

$$|\psi_m\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$

Applicando di nuovo lo stesso proiettore,

$$P_m |\psi_m\rangle = P_m \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{P_m^2 |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = |\psi_m\rangle .$$

Quindi una seconda misura restituisce lo stesso esito con probabilità uno.

Osservabili e operatori hermitiani

Una grandezza osservabile è rappresentata da un operatore hermitiano:

$$\boxed{A = A^\dagger.}$$

L'hermiticità garantisce due proprietà operative:

RISULTATI REALI

gli autovalori di A sono reali.

ESITI DISTINTI

autospazi con autovalori diversi sono ortogonali.

Autospazi e proiettori spettrali

Per un autovalore a, l'autospazio è

$$\mathcal{H}_a = \{|v\rangle : A|v\rangle = a|v\rangle\}.$$

A ciascun autospazio associamo il proiettore P_a.

Il significato è operativo:

$$P_a|\psi\rangle = \text{componente di } |\psi\rangle \text{ nell'autospazio di } a.$$

I proiettori soddisfano

$$P_a P_b = 0 \ (a \neq b), \qquad P_a^2 = P_a, \qquad \sum_a P_a = I.$$

Decomposizione spettrale e Osservabili

Per un'osservabile hermitiana con autovalori distinti a, scriviamo

$$\boxed{A = \sum_a a P_a.}$$

I simboli hanno natura diversa:

OPERATORI

A: l'osservabile.

P_a: proiettore sull'autospazio di a.

aP_a: ancora un operatore.

NUMERI

a: autovalore reale.

La somma $\sum_a$ scorre gli autovalori *distinti*.

Ogni P_a può proiettare anche su un autospazio di dimensione maggiore di uno.

Decomposizione spettrale e Osservabili

Prendiamo un autovettore $|u_a\rangle$ di A, con autovalore a. Per ortogonalità degli autospazi:

$$P_b |u_a\rangle = \begin{cases} |u_a\rangle, & b = a, \\ 0, & b \neq a. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \left(\sum_b b P_b \right) |u_a\rangle &= \sum_b b\, P_b |u_a\rangle \\ &= a |u_a\rangle = A |u_a\rangle . \end{aligned}$$

Gli autovettori formano una base: i due operatori coincidono su ogni vettore.

$$\boxed{A = \sum_a a P_a .}$$

Decomposizione spettrale e Osservabili

Misurare A significa misurare la famiglia dei suoi proiettori spettrali $\{P_a\}$.

I possibili risultati sono gli autovalori a.

$$\boxed{p(a) = \langle\psi|\, P_a\, |\psi\rangle\,.}$$

Se l'autospazio è unidimensionale e generato da $|a\rangle$, allora

$$P_a = |a\rangle\,\langle a|\,, \qquad p(a) = |\,\langle a|\psi\rangle\,|^2.$$

Se l'autospazio è degenere, P_a proietta sull'intero sottospazio.

Decomposizione spettrale e Osservabili

Per

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gli autostati sono $|0\rangle$ e $|1\rangle$, con autovalori $+1$ e -1.

$$P_+ = |0\rangle\langle 0|, \qquad P_- = |1\rangle\langle 1|.$$

Dunque

$$\boxed{Z = (+1)P_+ + (-1)P_- = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.}$$

Decomposizione spettrale e Osservabili

Se

$$A\,|a\rangle = a\,|a\rangle\,,$$

allora

$$\langle a|\,A\,|a\rangle = a\,\langle a|a\rangle\,.$$

Poiché $A = A^\dagger$, il numero $\langle a|\,A\,|a\rangle$ coincide con il suo complesso coniugato:

$$(\langle a|\,A\,|a\rangle)^* = \langle a|\,A\,|a\rangle\,.$$

Quindi

$$a^*\,\langle a|a\rangle = a\,\langle a|a\rangle\,.$$

Siccome $\langle a|a\rangle > 0$, segue $a = a^*$: l'autovalore è reale.

Osservabili e valori medi

Se

$$A = \sum_a a P_a, \qquad p(a) = \langle\psi| P_a |\psi\rangle ,$$

allora

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_\psi &= \sum_a a\, p(a) \\ &= \sum_a a \langle\psi| P_a |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \left(\sum_a a P_a\right) |\psi\rangle \\ &= \boxed{\langle\psi| A |\psi\rangle}. \end{aligned}$$

Osservabili e valori medi

Per Z, gli unici esiti possibili sono $+1$ e -1.

Se

$$p(+1) = \frac{3}{4}, \qquad p(-1) = \frac{1}{4},$$

allora

$$\langle Z \rangle = (+1)\frac{3}{4} + (-1)\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Il numero $1/2$ non può comparire come esito di una singola misura di Z.

Il valore medio descrive la media statistica di molte ripetizioni, non un valore nascosto del singolo sistema.

Osservabili e valori medi

La varianza di A nello stato $|\psi\rangle$ è

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - \langle A\rangle I)^2 \right\rangle .$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \langle A^2 - 2\langle A\rangle A + \langle A\rangle^2 I\rangle \\ &= \langle A^2\rangle - 2\langle A\rangle^2 + \langle A\rangle^2 .\end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 .}$$

Degenerazione delle osservabili

Per un qubit, l'osservabile di Pauli Z è

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando:

$$Z\,|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\,|0\rangle\,, \qquad Z\,|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\,|1\rangle\,.$$

Per due qubit definiamo l'osservabile $A = Z \otimes Z$. L'azione sui prodotti tensoriali è

$$\boxed{(Z \otimes Z)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (Z\,|a\rangle) \otimes (Z\,|b\rangle).}$$

Esempio: degenerazione

$$
\begin{aligned}
(Z \otimes Z)\,|00\rangle &= (Z\,|0\rangle) \otimes (Z\,|0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle = +\,|00\rangle\,, \\
(Z \otimes Z)\,|01\rangle &= (Z\,|0\rangle) \otimes (Z\,|1\rangle) = |0\rangle \otimes (-\,|1\rangle) = -\,|01\rangle\,, \\
(Z \otimes Z)\,|10\rangle &= (Z\,|1\rangle) \otimes (Z\,|0\rangle) = (-\,|1\rangle) \otimes |0\rangle = -\,|10\rangle\,, \\
(Z \otimes Z)\,|11\rangle &= (Z\,|1\rangle) \otimes (Z\,|1\rangle) = (-\,|1\rangle) \otimes (-\,|1\rangle) = +\,|11\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Il **segno complessivo** è il prodotto dei due autovalori di Z.

Autospazi degeneri e misura della parità

I quattro vettori formano due autospazi, ognuno di dimensione due:

$$\mathcal{H}_+ = \text{span}\{|00\rangle, |11\rangle\},$$
$$\mathcal{H}_- = \text{span}\{|01\rangle, |10\rangle\}.$$

I proiettori spettrali sono

$$\boxed{P_+ = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|},$$

$$\boxed{P_- = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|}.$$

Misurare $Z \otimes Z$ distingue **parità pari** (esito $+1$: 00 o 11) da **parità dispari** (esito -1: 01 o 10).

Compatibilità e commutatore

Per due osservabili A e B, definiamo

$$[A, B] = AB - BA.$$

Se

$$[A, B] = 0,$$

le osservabili possono avere una base ortonormale di autovettori comuni: sono compatibili.

Se invece

$$[A, B] \neq 0,$$

non esiste in generale una base completa di autovettori comuni: l'ordine delle misure può diventare fisicamente rilevante.

Osservabili (matrici) di Pauli

Le matrici

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono hermitiane e unitarie:

$$X^\dagger = X, \quad Y^\dagger = Y, \quad Z^\dagger = Z, \qquad X^2 = Y^2 = Z^2 = I.$$

Quindi rappresentano osservabili con autovalori ± 1.

Osservabili (matrici) di Pauli

Le tre osservabili di Pauli selezionano tre basi diverse:

$$Z: \quad |0\rangle, |1\rangle;$$

$$X: \quad |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}};$$

$$Y: \quad |+_y\rangle = \frac{|0\rangle + i\,|1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-_y\rangle = \frac{|0\rangle - i\,|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Sulla sfera di Bloch corrispondono agli assi z, x e y.

Osservabili (matrici) di Pauli

Calcoliamo

$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ZX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$[X, Z] = XZ - ZX = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2iY \neq 0.$$

Le osservabili X e Z non sono compatibili.

L'ordine delle misure conta

Prepariamo $|0\rangle$.

$$Z\,|0\rangle = +\,|0\rangle\,,$$

quindi una misura di Z dà $+1$ con certezza.

Ma

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Una misura di X dà $+1$ o -1 con probabilità $1/2$.

Se misuriamo prima X, lo stato diventa $|+\rangle$ o $|-\rangle$; una successiva misura di Z non restituisce più $+1$ con certezza.

Valor Medio di Operatori

STATISTICA CLASSICA

Variabile casuale X: valori x_i, probabilità p_i.

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \sum_i x_i p_i.}$$

Anche il quadrato ha un valore medio:

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 p_i.$$

MECCANICA QUANTISTICA

Osservabile A: autovalori a, $p(a) = \langle\psi| P_a |\psi\rangle$.

$$\boxed{\langle A\rangle = \sum_a a\, p(a) = \langle\psi| A |\psi\rangle .}$$

Analogamente:

$$\langle A^2\rangle = \sum_a a^2 p(a).$$

Stessa media statistica: cambia il modo di calcolare le probabilità.

Valor Medio di Operatori

STATISTICA CLASSICA

Scostamento dal valor medio: $x_i - \mu_X$.

$$\sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i.$$

Sviluppando il quadrato:

$$\boxed{\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2.}$$

$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ è un numero ≥ 0.

MECCANICA QUANTISTICA

Scostamento dal valor medio: $a - \langle A \rangle$.

$$(\Delta A)^2 = \sum_a (a - \langle A \rangle)^2 p(a).$$

Sviluppando il quadrato:

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.}$$

$\Delta A = \sqrt{(\Delta A)^2}$ è un numero ≥ 0.

ΔA misura la dispersione degli esiti, non l'errore dello strumento.

Valor Medio di Operatori

STATISTICA CLASSICA

Variabili X, Y definite congiuntamente.

$$X_0 = X - E[X], \quad Y_0 = Y - E[Y].$$

$$\sigma_X^2 = E[X_0^2], \quad \sigma_Y^2 = E[Y_0^2].$$

Per Cauchy–Schwarz:

$$\boxed{\sigma_X \sigma_Y \geq |E[X_0 Y_0]|.}$$

A destra: modulo della covarianza.

MECCANICA QUANTISTICA

Operatori hermitiani A, B nello stato $|\psi\rangle$.

$$A_0 = A - \langle A \rangle I, \quad B_0 = B - \langle B \rangle I.$$

$$(\Delta A)^2 = \|A_0 |\psi\rangle\|^2, \, (\Delta B)^2 = \|B_0 |\psi\rangle\|^2 .$$

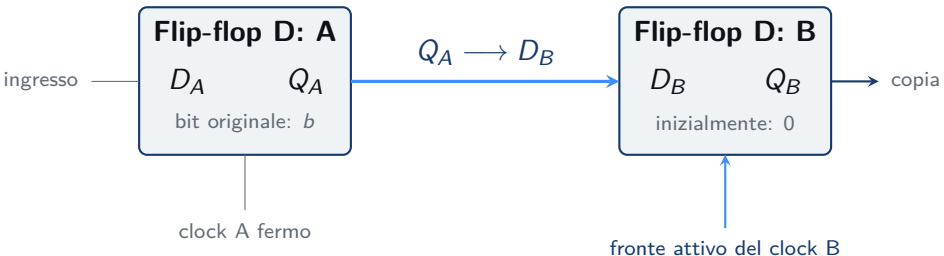
Per Cauchy–Schwarz:

$$\boxed{\Delta A \, \Delta B \geq |\langle A_0 B_0 \rangle|.}$$

Il valore medio $\langle A_0 B_0 \rangle$ può essere complesso.

No cloning Theorem

A contiene il bit $b \in \{0,1\}$; **B**, inizialmente a 0, ne riceverà una copia.



Al fronte attivo del **clock B** (con Q_A stabile), Q_B acquisisce il valore di Q_A e il bit in A non cambia:

$$(0,0) \longrightarrow (0,0), \qquad (1,0) \longrightarrow (1,1).$$

Domanda: si può duplicare allo stesso modo uno *stato quantistico arbitrario*?

No cloning Theorem

Un bit classico può essere duplicato: il valore 0 diventa 00, il valore 1 diventa 11.

Per un qubit, invece, lo stato può essere una sovrapposizione:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Domanda: possiamo costruire un solo dispositivo che produca due copie esatte di questo stato, *qualunque* siano α e β, senza conoscere lo stato iniziale?

No cloning Theorem

Prima dell'operazione abbiamo due qubit:

- il primo è nello stato sconosciuto $|\psi\rangle$;
- il secondo è preparato nello stato noto $|0\rangle$ e fa da supporto per la copia.

Insieme sono nello stato $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$.

Dopo l'operazione vogliamo due qubit nello stesso stato:

$$\boxed{U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle\,.}$$

L'operatore U descrive una trasformazione **unitaria** sui due qubit: il primo rimane in $|\psi\rangle$ e il secondo diventa una copia. **Universale** significa che U è sempre lo stesso, per ogni possibile $|\psi\rangle$: non dipende da quale stato abbiamo ricevuto.

No cloning Theorem

Supponiamo che U copi correttamente i due stati della base computazionale:

$$U(|0\rangle \otimes |0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle\,,$$

$$U(|1\rangle \otimes |0\rangle) = |1\rangle \otimes |1\rangle\,.$$

Cioè, abbreviando il prodotto tensoriale,

$$\boxed{U\,|00\rangle = |00\rangle\,, \qquad U\,|10\rangle = |11\rangle\,.}$$

Fin qui non c'è alcuna contraddizione: **due stati ortogonali possono essere copiati**. Il problema nasce chiedendo allo *stesso* U di copiare anche una loro sovrapposizione.

No cloning Theorem

Consideriamo lo stato

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Il secondo qubit è ancora inizializzato in $|0\rangle$, dunque

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |0\rangle &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \\ &= \boxed{\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Il dispositivo dovrebbe copiare anche $|+\rangle$, perché abbiamo chiesto che funzioni per uno **stato arbitrario**.

No cloning Theorem

La trasformazione U è lineare. Perciò

$$\begin{aligned} U(|+\rangle\,|0\rangle) &= U\left(\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{U\,|00\rangle + U\,|10\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato $U\,|00\rangle = |00\rangle$ e $U\,|10\rangle = |11\rangle$. **Per linearità, l'uscita è già determinata**, anche quando l'ingresso è una sovrapposizione.

No cloning Theorem

Se U clonasse anche $|+\rangle$, il risultato dovrebbe essere

$$|+\rangle \otimes |+\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2}.$$

Ma la linearità obbliga lo stesso U a produrre

$$U(|+\rangle\,|0\rangle) = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

I due risultati sono diversi: nel secondo mancano i termini $|01\rangle$ e $|10\rangle$. Dunque U non può copiare simultaneamente $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|+\rangle$.

No cloning Theorem

Ipotesi: lo stesso operatore unitario U clona due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, con il secondo qubit inizializzato in $|0\rangle$:

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle\,,$$
$$U(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle\,.$$

I due possibili stati iniziali del sistema composto sono

$$|\Psi_i\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle\,, \qquad |\Phi_i\rangle = |\phi\rangle \otimes |0\rangle\,.$$

Prodotto interno prima della clonazione:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_i|\Phi_i\rangle &= (\langle\psi| \otimes \langle 0|)(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \langle\psi|\phi\rangle\ \langle 0|0\rangle \\ &= \boxed{\langle\psi|\phi\rangle}.\end{aligned}$$

Il prodotto interno si fattorizza; $\langle 0|0\rangle = 1$ per normalizzazione.

No cloning Theorem

Se il dispositivo funzionasse, i due stati finali sarebbero

$$|\Psi_f\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle\,, \qquad |\Phi_f\rangle = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle\,.$$

Prodotto interno dopo la clonazione:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_f|\Phi_f\rangle &= (\langle\psi| \otimes \langle\psi|)(|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle) \\ &= \langle\psi|\phi\rangle\ \langle\psi|\phi\rangle \\ &= \boxed{\left(\langle\psi|\phi\rangle\right)^2}.\end{aligned}$$

Ma un operatore unitario conserva il prodotto interno:

$$\langle\Psi_i|\Phi_i\rangle = \langle U\Psi_i|U\Phi_i\rangle = \langle\Psi_f|\Phi_f\rangle\,.$$

Dunque $\langle\psi|\phi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^2$. Ponendo $r = |\,\langle\psi|\phi\rangle\,|$:

$$\boxed{r = r^2 \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \text{ oppure } r = 1.}$$

No cloning Theorem

Poiché $r = |\langle\psi|\phi\rangle|$, la condizione $r = 0$ significa

$$\langle\psi|\phi\rangle = 0 : \qquad \textbf{gli stati sono ortogonali}.$$

Per esempio, $\langle 0|1\rangle = 0$. Possiamo **costruire** un unico operatore U che copi entrambi, con il secondo qubit inizialmente in $|0\rangle$:

$$\boxed{U|00\rangle = |00\rangle\,, \qquad U|10\rangle = |11\rangle\,.}$$

Per definire U anche sui restanti vettori della base, scegliamo

$$U|01\rangle = |01\rangle\,, \qquad U|11\rangle = |10\rangle\,.$$

Le quattro immagini $\{|00\rangle\,, |01\rangle\,, |11\rangle\,, |10\rangle\}$ sono ancora una **base ortonormale**: l'operatore lineare così definito è unitario, poiché conserva i prodotti interni.

No cloning Theorem

La relazione $r = r^2$, con $r = |\langle\psi|\phi\rangle|$, consente soltanto due possibilità per stati puri normalizzati:

- $r = 0$**:** stati ortogonali. Si può costruire un'unitaria che copi entrambi, come per $|0\rangle$ e $|1\rangle$.
- $r = 1$**:** lo stesso stato fisico, eventualmente con una fase globale diversa.

Per stati distinti **non ortogonali**, invece,

$$0 < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad r \neq r^2.$$

Esempio: $|0\rangle$ e $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

$$r = |\langle 0|+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2} = r^2.$$

Conclusione: copiare stati ortogonali è possibile; **un clonatore universale non esiste**.

No cloning Theorem

Il no-cloning vieta

$$|\psi\rangle \longmapsto |\psi\rangle\,|\psi\rangle\,|\psi\rangle$$

per uno stato arbitrario sconosciuto.

Ma non vieta una codifica del tipo

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \longmapsto \alpha\,|000\rangle + \beta\,|111\rangle\,.$$

Il membro destro non è $|\psi\rangle^{\otimes 3}$: è una rappresentazione ridondante in uno spazio più grande.

La correzione quantistica degli errori non copia lo stato: distribuisce l'informazione in correlazioni.

No cloning Theorem

Se due stati puri sono ortogonali,

$$\langle \psi | \phi \rangle = 0,$$

possiamo includerli nella stessa base ortonormale e distinguerli con certezza.

Se invece

$$\langle \psi | \phi \rangle \neq 0,$$

non esiste una misura che, con una sola copia, identifichi sempre con certezza quale dei due sia stato preparato.

Esempio: No Cloning

Consideriamo i due stati $|0\rangle$ e $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Questi stati non sono ortogonali, infatti:

$$\begin{aligned}\langle 0|+\rangle &= \langle 0| \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.\end{aligned}$$

Supponiamo che una sorgente prepari **un unico qubit**, scegliendo tra gli stati $|0\rangle$ e $|+\rangle$, senza comunicarci quale stato abbia scelto.

È possibile determinare con certezza lo stato preparato, effettuando una misura sul qubit?

Esempio: No Cloning

Misuriamo nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Caso 1 — La sorgente prepara $|0\rangle$. Per la regola di Born:

$$P_{|0\rangle}(0) = |\langle 0|0\rangle|^2 = 1,$$
$$P_{|0\rangle}(1) = |\langle 1|0\rangle|^2 = 0.$$

La misura restituisce **necessariamente 0**.

Caso 2 — La sorgente prepara $|+\rangle$. Usiamo $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$:

$$P_{|+\rangle}(0) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \left|\frac{1+0}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2},$$
$$P_{|+\rangle}(1) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left|\frac{0+1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

La misura restituisce **0 o 1**, ciascuno con probabilità $1/2$.

Esempio: No Cloning

Che cosa deduciamo dal risultato della misura?

Stato iniziale	Esito 0	Esito 1
$\|0\rangle$	1	0
$\|+\rangle$	1/2	1/2

Se otteniamo 1: $P_{|0\rangle}(1) = 0$; l'esito è impossibile per $|0\rangle$. La sorgente può preparare soltanto $|0\rangle$ o $|+\rangle$: dunque **lo stato iniziale era** $|+\rangle$.
Se otteniamo 0: $P_{|0\rangle}(0) = 1$ e $P_{|+\rangle}(0) = 1/2$: **entrambe le preparazioni** restano possibili. Non possiamo decidere con certezza.
Stato dopo la misura: se l'esito è 1, la misura proiettiva lascia il qubit in $|1\rangle$; lo stato *prima* della misura era invece $|+\rangle$.

Stati puri e miscele statistiche

Consideriamo **due preparazioni alternative** dello stesso tipo di qubit.

Preparazione A — stato puro. La sorgente prepara sempre

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Preparazione B — miscela statistica. La sorgente sceglie, a ogni prova,

$$|0\rangle \text{ con probabilità } \frac{1}{2}, \qquad |1\rangle \text{ con probabilità } \frac{1}{2}.$$

Nella preparazione A ogni qubit è in una **sovrapposizione coerente**; nella preparazione B ogni qubit è invece preparato in uno dei due stati, selezionato casualmente.

Domanda: possiamo distinguere A e B mediante misure?

Misura nella base computazionale

Misuriamo nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Preparazione A — $|+\rangle$. Per la regola di Born:

$$P_{\mathrm{A}}(0) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \frac{1}{2},$$
$$P_{\mathrm{A}}(1) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Preparazione B — miscela. Sommiamo le probabilità con peso $1/2$:

$$P_{\mathrm{B}}(0) = \frac{1}{2}|\langle 0|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 0|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2},$$
$$P_{\mathrm{B}}(1) = \frac{1}{2}|\langle 1|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 1|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Conclusione: A e B danno **le stesse probabilità** in questa base.

Sovrapposizione e miscela: base ruotata

Misuriamo nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, con $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Preparazione A — stato $|+\rangle$.

$$P_{\mathrm{A}}(+) = |\langle +|+\rangle|^2 = 1,$$
$$P_{\mathrm{A}}(-) = |\langle -|+\rangle|^2 = 0.$$

Preparazione B — miscela equiprobabile.

$$P_{\mathrm{B}}(+) = \frac{1}{2}|\langle +|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle +|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$P_{\mathrm{B}}(-) = \frac{1}{2}|\langle -|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle -|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusione: nella nuova base A dà sempre $+$; B dà $+$ oppure $-$ con uguale probabilità. Le due preparazioni sono quindi **statisticamente distinguibili**.

Matrice densità

Consideriamo un sistema preparato in uno degli stati puri $|\psi_i\rangle$, ciascuno con probabilità p_i, dove $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$.

Definizione generale dell'operatore densità:

$$\boxed{\rho = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle\psi_i|}.$$

Caso particolare: stato puro. Se lo stato $|\psi\rangle$ viene preparato con probabilità 1, resta un unico termine:

$$\boxed{\rho = |\psi\rangle \, \langle\psi|}.$$

La seconda formula non è una definizione alternativa: discende dalla prima.

Le proprietà fondamentali sono $\rho^\dagger = \rho$, $\rho \geq 0$ e $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$.

Operatore densità: esempio

1. Stato puro: la sorgente prepara sempre $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

$$\rho_{\text{puro}} = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}}.$$

2. Miscela statistica: $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ciascuno preparato con probabilità $1/2$.

$$\rho_{\text{misto}} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Osservazione: diagonali identiche, elementi fuori diagonale differenti.

Dalle preparazioni alla coerenza

Abbiamo confrontato **due preparazioni alternative** di un qubit:

$$\rho_A = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \rho_B = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nella base computazionale danno le stesse probabilità:

$$P_A(0) = P_B(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad P_A(1) = P_B(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ danno risultati diversi:

$$P_A(+) = 1, \qquad P_B(+) = \tfrac{1}{2}.$$

Domanda: quale caratteristica della preparazione A manca nella B?

Interferenza: la somma delle ampiezze

Consideriamo la sovrapposizione pura

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Misuriamo nella base $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$. Per il risultato $+$, la **regola di Born** fornisce

$$\begin{aligned} P_{|\psi\rangle}(+) &= |\,\langle +|\psi\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta\Big) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} + \mathrm{Re}(\alpha\beta^*)}. \end{aligned}$$

Miscela statistica: la somma delle probabilità

Consideriamo una sorgente che prepari alternativamente:

$$|0\rangle \text{ con probabilità } |\alpha|^2, \qquad |1\rangle \text{ con probabilità } |\beta|^2.$$

In questo caso le due preparazioni sono **alternative**: si sommano le probabilità dei rispettivi esiti.

$$\begin{aligned} P_{\text{mix}}(+) &= |\alpha|^2 |\langle +|0\rangle|^2 + |\beta|^2 |\langle +|1\rangle|^2 \\ &= \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Confronto: nella sovrapposizione $P_{|\psi\rangle}(+) = \frac{1}{2} + \text{Re}(\alpha\beta^*)$; nella miscela $P_{\text{mix}}(+) = \frac{1}{2}$. **Manca il termine di interferenza.**

Dove compare la coerenza nella matrice?

Costruiamo l'operatore densità dello stato puro $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{puro}} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= |\alpha|^2\,|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*\,|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + \alpha^*\beta\,|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2\,|1\rangle\langle 1|\,.\end{aligned}$$

Nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$\rho_{\text{puro}} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{mix}} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

Gli elementi fuori diagonale $\rho_{01} = \alpha\beta^*$ e $\rho_{10} = \alpha^*\beta$ contengono informazioni sulla **relazione di fase** tra le ampiezze di $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Queste informazioni possono produrre **interferenza** nelle probabilità di misura: per questo sono chiamati **elementi di coerenza** rispetto alla base considerata.

La fase relativa delle ampiezze

Scriviamo le ampiezze complesse come

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta_0}, \qquad \beta = |\beta| e^{i\theta_1}.$$

Il termine fuori diagonale diventa

$$\boxed{\rho_{01} = \alpha\beta^* = |\alpha||\beta| e^{i(\theta_0 - \theta_1)}}.$$

Quindi ρ_{01} conserva informazione sia sui moduli delle ampiezze, sia sulla **loro differenza di fase**.

Precisazione: non è la sola presenza di una fase a creare coerenza. Nella base considerata, la coerenza è associata ai termini $\alpha\beta^*$ e $\alpha^*\beta$ della sovrapposizione.

La coerenza modifica le probabilità

Per una misura nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, la probabilità del risultato $+$ è:

$$\begin{aligned} P_\rho(+) &= \langle + | \, \rho \, | + \rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{01} + \rho_{10}). \end{aligned}$$

Poiché $\rho_{00} + \rho_{11} = 1$ e $\rho_{10} = \rho_{01}^*$:

$$\boxed{P_\rho(+) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \rho_{01}}, \qquad \boxed{P_\rho(-) = \frac{1}{2} - \operatorname{Re} \rho_{01}}.$$

Ora vediamo **come** gli elementi fuori diagonale modificano le statistiche della misura.

Esempio: uno stato con fase relativa

Consideriamo la famiglia di stati puri

$$|\psi_\phi\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i\phi}\,|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La matrice densità è

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}.$$

L'elemento fuori diagonale è $\rho_{01} = e^{-i\phi}/2$. Per una misura nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$P_\phi(+) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,\rho_{01} = \boxed{\frac{1+\cos\phi}{2}}.$$

La probabilità dipende dalla **fase relativa** ϕ.

Interferenza: tre valori della fase

Per $|\psi_\phi\rangle = (|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle)/\sqrt{2}$, abbiamo ricavato

$$P_\phi(+) = \frac{1+\cos\phi}{2}.$$

Fase	$P_\phi(+)$	Stato o significato
$\phi = 0$	1	$\|+\rangle$: interferenza costruttiva
$\phi = \pi$	0	$\|-\rangle$: interferenza distruttiva
$\phi = \pi/2$	1/2	Nessun contrasto in questa base

Nell'ultimo caso $\rho_{01} = -i/2 \neq 0$: **la coerenza è ancora presente**, ma una misura nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ non rivela la sua parte immaginaria.

Coerenza: attenzione alla base

Consideriamo **lo stesso stato fisico** $|+\rangle$.
Nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Conclusione: la presenza di elementi fuori diagonale dipende dalla **base usata per rappresentare** ρ. Non è quindi, da sola, un criterio per stabilire se lo stato è puro.

Le proprietà di un operatore densità

Dalla definizione $\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$, con $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$, ricaviamo:

1. **Hermiticità:**
$$\rho^\dagger = \sum_i p_i (\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)^\dagger = \rho.$$

2. **Positività:** per ogni vettore $\left|v\right\rangle$,
$$\left\langle v\right| \rho \left|v\right\rangle = \sum_i p_i \left|\left\langle v|\psi_i\right\rangle\right|^2 \geq 0.$$

3. **Traccia unitaria:**
$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_i p_i \,\mathrm{Tr}(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|) = \sum_i p_i = 1.$$

Queste condizioni rendono ρ una matrice di probabilità quantistica fisicamente ammissibile.

Come riconoscere uno stato puro?

Se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e $\langle\psi|\psi\rangle = 1$:

$$\rho^2 = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1} \langle\psi| = \rho, \qquad \boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1}.$$

Perché uno stato misto dà un risultato diverso? Essendo hermitiana e positiva, ρ ha autovalori $\lambda_j \geq 0$ con $\sum_j \lambda_j = 1$:

$$\mathrm{Tr}(\rho^2) = \sum_j \lambda_j^2 \leq \left(\sum_j \lambda_j\right)^2 = 1.$$

L'uguaglianza vale solo quando un autovalore è 1 e tutti gli altri sono nulli, cioè per uno stato puro.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1 \text{ puro}; \qquad \mathrm{Tr}(\rho^2) < 1 \text{ misto}.}$$

Purezza: calcolo nei due esempi

Stato puro $|+\rangle$:

$$\rho_A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \rho_A.$$

Di conseguenza $\boxed{\mathrm{Tr}(\rho_A^2) = 1}$.

Miscela equiprobabile:

$$\rho_B = \frac{1}{2}I, \qquad \rho_B^2 = \frac{1}{4}I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Di conseguenza $\boxed{\mathrm{Tr}(\rho_B^2) = \frac{1}{2}}$.

La purezza è indipendente dalla base: $\mathrm{Tr}[(U^\dagger \rho U)^2] = \mathrm{Tr}(\rho^2)$.

La regola di Born con l'operatore densità

Quale probabilità assegna ρ al risultato m, descritto dal proiettore P_m?
La preparazione comprende gli stati $|\psi_i\rangle$ con probabilità p_i. Per la regola di Born:

$$\begin{aligned} P_\rho(m) &= \sum_i p_i \langle\psi_i| P_m |\psi_i\rangle \\ &= \sum_i p_i \,\mathrm{Tr}(P_m |\psi_i\rangle \langle\psi_i|) \\ &= \mathrm{Tr}\left(P_m \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\right). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\boxed{P_\rho(m) = \mathrm{Tr}(P_m \rho)}.$$

La formula vale sia per uno stato puro sia per una miscela.

Stato dopo una misura proiettiva

Una misura proiettiva descritta dai proiettori P_m assegna all'esito m la probabilità

$$p(m) = \mathrm{Tr}(P_m \rho).$$

Se si osserva l'esito m, con $p(m) > 0$, lo stato *condizionato* diventa

$$\boxed{\rho_m = \frac{P_m \rho P_m}{\mathrm{Tr}(P_m \rho)}}.$$

Verifichiamo la normalizzazione usando $P_m^2 = P_m$ e la ciclicità della traccia:

$$\mathrm{Tr}(\rho_m) = \frac{\mathrm{Tr}(P_m \rho P_m)}{\mathrm{Tr}(P_m \rho)} = \frac{\mathrm{Tr}(P_m^2 \rho)}{\mathrm{Tr}(P_m \rho)} = 1.$$

La formula si riferisce all'esito **effettivamente ottenuto**, non a una misura di cui si ignora l'esito.

Esempio: la stessa misura su due preparazioni

Per la misura con risultato $+$,

$$P_+ = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Preparazione A: $\rho_A = P_+$, dunque

$$P_A(+) = \mathrm{Tr}(P_+\rho_A) = \mathrm{Tr}(P_+^2) = \mathrm{Tr}(P_+) = \boxed{1}.$$

Preparazione B: $\rho_B = I/2$, dunque

$$P_B(+) = \mathrm{Tr}\left(P_+\frac{I}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(P_+) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Abbiamo ritrovato con ρ i risultati calcolati in precedenza direttamente con i ket.

Valore medio di un'osservabile con ρ

Per un'osservabile $M = \sum_m m P_m$, il valore medio è

$$\langle M \rangle = \sum_m m\, P_\rho(m) = \sum_m m\ \mathrm{Tr}(P_m \rho)$$
$$= \mathrm{Tr}\left(\sum_m m P_m \rho \right) = \boxed{\mathrm{Tr}(M\rho)}.$$

Esempio: per $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\langle X \rangle_{\rho_A} = \mathrm{Tr}(X\rho_A) = 1, \qquad \langle X \rangle_{\rho_B} = \mathrm{Tr}(X\rho_B) = 0.$$

La differenza dei valori medi rivela la diversa preparazione quantistica.

Dalla sfera di Bloch alla Bloch ball

La **sfera di Bloch** rappresenta geometricamente gli **stati puri** di un qubit.

Con la **matrice densità** possiamo descrivere anche gli **stati misti**.

Cerchiamo una rappresentazione geometrica che comprenda entrambe le classi di stati.

Mostreremo che ogni matrice densità di un qubit si scrive

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})}, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Poi determineremo quali vettori $\mathbf{r}$ corrispondono a **stati fisicamente ammissibili**.

Dai tre parametri al vettore di Bloch

Ricordiamo le matrici di Pauli X, Y, Z. Definiamo tre numeri reali r_x, r_y, r_z ponendo

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r_x X + r_y Y + r_z Z).$$

Sostituendo le matrici:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix}}.$$

Il confronto con $\rho = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c^* & 1-a \end{smallmatrix}\right)$ dà

$$\boxed{r_z = 2a - 1}, \qquad \boxed{r_x = 2\,\mathrm{Re}\, c}, \qquad \boxed{r_y = -2\,\mathrm{Im}\, c}.$$

Abbiamo così una corrispondenza univoca tra ρ e $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$.

Valore medio di X: sviluppo del prodotto

Dalla parametrizzazione di Bloch e dalla definizione del valore medio:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r_x X + r_y Y + r_z Z), \qquad \langle X \rangle = \mathrm{Tr}(\rho X).$$

Sostituiamo ρ:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}[(I + r_x X + r_y Y + r_z Z)X]\,.$$

Distribuendo il prodotto per X:

$$\boxed{\langle X \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big(IX + r_x X^2 + r_y YX + r_z ZX\Big)\,.}$$

Il passaggio successivo utilizza la linearità della traccia.

Valore medio di X: valutazione delle tracce

Per linearità della traccia:

$$\langle X\rangle = \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{Tr}(IX) + r_x\,\mathrm{Tr}(X^2) + r_y\,\mathrm{Tr}(YX) + r_z\,\mathrm{Tr}(ZX)\Big].$$

Usiamo $IX = X$, $X^2 = I$ e le identità

$$\mathrm{Tr}(X) = 0, \qquad \mathrm{Tr}(I) = 2, \qquad \mathrm{Tr}(YX) = \mathrm{Tr}(ZX) = 0.$$

Quindi

$$\langle X\rangle = \frac{1}{2}(0 + 2r_x + 0 + 0) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\langle X\rangle = r_x}.$$

Analogamente: $\langle Y\rangle = r_y$ e $\langle Z\rangle = r_z$.

Le coordinate di Bloch sono misurabili

Usando $\langle M \rangle = \mathrm{Tr}(\rho M)$ e le identità $\mathrm{Tr}\,\sigma_i = 0$, $\mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$:

$$\boxed{r_x = \mathrm{Tr}(\rho X) = \langle X \rangle}, \qquad \boxed{r_y = \langle Y \rangle}, \quad \boxed{r_z = \langle Z \rangle}.$$

Ogni osservabile di Pauli ha esiti $+1$ e -1. Di conseguenza, per esempio,

$$r_x = (+1)P_X(+) + (-1)P_X(-) = P_X(+) - P_X(-).$$

Poiché $P_X(+) + P_X(-) = 1$:

$$\boxed{P_X(+) = \frac{1 + r_x}{2}}.$$

Misurando X, Y, Z su preparazioni identiche possiamo quindi ricostruire **l'intera matrice densità di un qubit**.

Bloch ball: calcolo degli autovalori

Riprendiamo la matrice densità del qubit:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix}.$$

Passo 1: essendo $\operatorname{Tr}\rho = 1$, la somma dei due autovalori è $\lambda_+ + \lambda_- = 1$.

Passo 2: il determinante è

$$\det\rho = \frac{1}{4}\Big[(1 + r_z)(1 - r_z) - (r_x^2 + r_y^2)\Big] = \frac{1 - |\mathbf{r}|^2}{4}.$$

Passo 3: l'equazione caratteristica diventa

$$\boxed{\lambda^2 - \lambda + \frac{1 - |\mathbf{r}|^2}{4} = 0}.$$

Bloch ball: perché $|\mathbf{r}| \leq 1$?

Risolviamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1 - |\mathbf{r}|^2}{4} = 0.$$

Le sue soluzioni sono

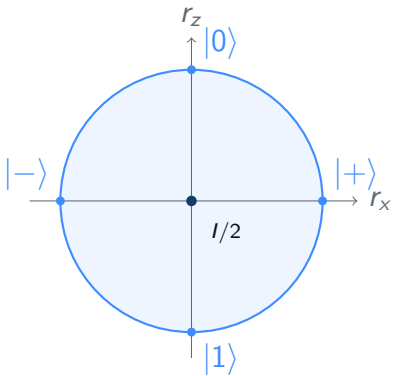
$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 - |\mathbf{r}|^2)}}{2} = \boxed{\frac{1 \pm |\mathbf{r}|}{2}}.$$

Perché ρ rappresenti uno stato fisico, entrambi gli autovalori devono essere non negativi:

$$\lambda_- \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - |\mathbf{r}| \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\mathbf{r}| \leq 1}.$$

Significato: i vettori ammessi riempiono **la palla unitaria** nello spazio delle coordinate di Bloch.

Bloch ball: stati sulla superficie e all'interno



Sezione $r_y = 0$ della palla di Bloch.

Esempi:

$|0\rangle$: $\mathbf{r} = (0, 0, 1)$

$|+\rangle$: $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$

$\rho = I/2$: $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$

La superficie $|\mathbf{r}| = 1$ raccoglie gli **stati puri**.

I punti interni $|\mathbf{r}| < 1$ descrivono **stati misti**.

Purezza e distanza dal centro

La forma di Bloch è

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \qquad \boldsymbol{\sigma} = (X, Y, Z).$$

Le matrici di Pauli soddisfano $(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = |\mathbf{r}|^2 I$. Quindi

$$\rho^2 = \frac{1}{4}\Big[(1 + |\mathbf{r}|^2)I + 2\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big].$$

Poiché $\mathrm{Tr}\, I = 2$ e $\mathrm{Tr}\,\sigma_i = 0$,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2) = \frac{1 + |\mathbf{r}|^2}{2}}.$$

Significato geometrico: sulla superficie $|\mathbf{r}| = 1$ la purezza è 1; al centro è $1/2$.

Bloch ball: esempio numerico

Consideriamo la miscela

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$$r_x = 0, \quad r_y = 0, \quad r_z = \frac{1}{2}, \qquad \boxed{\mathbf{r} = (0, 0, 1/2)}.$$

La purezza calcolata dalla matrice è

$$\mathrm{Tr}(\rho^2) = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}.$$

Verifica con la formula geometrica:

$$\frac{1 + |\mathbf{r}|^2}{2} = \frac{1 + 1/4}{2} = \boxed{\frac{5}{8}}.$$

Quale stato descrive un sottosistema?

Consideriamo due sistemi quantistici A e B con operatore densità globale ρ_{AB}.

Se possiamo misurare **soltanto** A, le osservabili accessibili hanno la forma $M_A \otimes I_B$. Il loro valore medio si calcola sul sistema completo:

$$\langle M_A \rangle = \mathrm{Tr}_{AB}[\rho_{AB}(M_A \otimes I_B)].$$

Problema: possiamo trovare un operatore ρ_A che riproduca tutti i valori medi locali?

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{AB}[\rho_{AB}(M_A \otimes I_B)] = \mathrm{Tr}_A(\rho_A M_A)}.$$

La risposta introduce la **traccia parziale**.

La traccia parziale sul sistema B

Lo stato ridotto di A si definisce con

$$\boxed{\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})}.$$

Se $\{|b_k\rangle\}$ è una base ortonormale di B:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_k (I_A \otimes \langle b_k|)\rho_{AB}(I_A \otimes |b_k\rangle).$$

Per un operatore prodotto si ricava

$$\boxed{\mathrm{Tr}_B(X_A \otimes Y_B) = X_A \,\mathrm{Tr}(Y_B)}.$$

Questa operazione elimina gli indici relativi a B ma conserva tutte le probabilità e i valori medi delle misure effettuate soltanto su A.

Traccia parziale: stato globale prodotto

Siano $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_B$ due stati normalizzati:

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B .$$

L'operatore densità globale è

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|_A \otimes |\phi\rangle\langle\phi|_B .$$

Tracciando sul sottosistema B:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= |\psi\rangle\langle\psi|_A \,\mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|_B) \\ &= \boxed{|\psi\rangle\langle\psi|_A}.\end{aligned}$$

Il sottosistema A è ancora in uno **stato puro**: $\mathrm{Tr}(\rho_A^2) = 1$.

Traccia parziale: stato globale di Bell

Consideriamo lo stato entangled

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

È uno stato **puro** del sistema globale AB. Costruiamo l'operatore densità:

$$\rho_{AB} = \left|\Phi^+\right\rangle\left\langle\Phi^+\right| = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\Big).$$

Traccia parziale: stato ridotto di Bell

Per i termini diagonali:

$$\mathrm{Tr}_B(|00\rangle\langle 00|) = |0\rangle\langle 0|, \qquad \mathrm{Tr}_B(|11\rangle\langle 11|) = |1\rangle\langle 1|.$$

Per i due termini incrociati:

$$\mathrm{Tr}_B(|00\rangle\langle 11|) = |0\rangle\langle 1|\ \langle 1|0\rangle = 0,$$
$$\mathrm{Tr}_B(|11\rangle\langle 00|) = |1\rangle\langle 0|\ \langle 0|1\rangle = 0.$$

Sommiamo i contributi rimasti:

$$\boxed{\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{I}{2}}.$$

Il solo qubit A è descritto da uno stato misto.

Uno stato globale puro, un sottosistema misto

Per la coppia di Bell:

$$\rho_{AB} = \left|\Phi^+\right\rangle\left\langle\Phi^+\right|, \qquad \boxed{\mathrm{Tr}(\rho_{AB}^2) = 1}.$$

Per il singolo qubit A:

$$\rho_A = \frac{I}{2}, \qquad \boxed{\mathrm{Tr}(\rho_A^2) = \frac{1}{2}}.$$

Non c'è contraddizione: A e B sono entangled, perciò lo stato del solo A non è puro.

La stessa matrice $I/2$ descrive anche una miscela preparata casualmente.

Evoluzione unitaria della matrice densità

Per uno stato puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e una trasformazione unitaria U:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\rho' &= |\psi'\rangle\langle\psi'| \\ &= U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger \\ &= \boxed{U\rho U^\dagger}.\end{aligned}$$

La stessa legge vale per uno stato misto $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$: ogni componente della miscela evolve attraverso lo stesso U.

L'evoluzione unitaria conserva la purezza

Partendo da $\rho' = U\rho U^\dagger$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(\rho')^2] &= \mathrm{Tr}(U\rho U^\dagger U\rho U^\dagger) \\ &= \mathrm{Tr}(U\rho^2 U^\dagger) \\ &= \boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2)}. \end{aligned}$$

Abbiamo usato $U^\dagger U = I$ e la **ciclicità della traccia**.

Uno stato puro rimane puro; uno stato misto conserva il proprio grado di purezza.

Attenzione: la purezza di un *sottosistema* può cambiare quando interagisce con l'ambiente.

Decoerenza: sistema chiuso e sistema aperto

Nei circuiti ideali il sistema è trattato come controllato e chiuso.

In un dispositivo reale il sistema interagisce con gradi di libertà esterni.

interazione con l'ambiente
↓
entanglement sistema–ambiente
↓
traccia parziale sull'ambiente

Il sistema complessivo può evolvere unitariamente; il sottosistema osservato può diventare misto.

Un modello elementare di ambiente

Prendiamo

$$|\psi\rangle_S = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \qquad |E\rangle\,.$$

L'interazione realizza

$$|0\rangle\,|E\rangle \mapsto |0\rangle\,|E_0\rangle\,, \qquad |1\rangle\,|E\rangle \mapsto |1\rangle\,|E_1\rangle\,.$$

Per linearità:

$$\boxed{|\Psi\rangle_{SE} = \alpha\,|0\rangle\,|E_0\rangle + \beta\,|1\rangle\,|E_1\rangle\,.}$$

Se $|E_0\rangle$ e $|E_1\rangle$ non sono proporzionali, sistema e ambiente sono entangled.

Lo stato ridotto del qubit: primo passaggio

Dalla slide precedente, dopo l'interazione con l'ambiente:

$$|\Psi\rangle_{SE} = \alpha\,|0\rangle\,|E_0\rangle + \beta\,|1\rangle\,|E_1\rangle\,.$$

Costruiamo l'operatore densità del sistema complessivo:

$$\rho_{SE} = |\Psi\rangle_{SE}\langle\Psi|_{SE}\,.$$

Sviluppando il prodotto esterno, otteniamo quattro termini:

$$\begin{aligned}\rho_{SE} = {} & |\alpha|^2\,|0\rangle\,\langle 0| \otimes |E_0\rangle\,\langle E_0| \\ & + \alpha\beta^*\,|0\rangle\,\langle 1| \otimes |E_0\rangle\,\langle E_1| \\ & + \alpha^*\beta\,|1\rangle\,\langle 0| \otimes |E_1\rangle\,\langle E_0| \\ & + |\beta|^2\,|1\rangle\,\langle 1| \otimes |E_1\rangle\,\langle E_1|\,.\end{aligned}$$

Lo stato ridotto: traccia dei quattro termini

Per descrivere il solo qubit calcoliamo $\rho_S = \mathrm{Tr}_E(\rho_{SE})$, usando la regola

$$\mathrm{Tr}_E(A \otimes |E_i\rangle \langle E_j|) = A \, \langle E_j|E_i\rangle \, .$$

Poiché gli stati ambientali sono normalizzati:

$$\mathrm{Tr}_E(|0\rangle \langle 0| \otimes |E_0\rangle \langle E_0|) = |0\rangle \langle 0| \, ,$$
$$\mathrm{Tr}_E(|1\rangle \langle 1| \otimes |E_1\rangle \langle E_1|) = |1\rangle \langle 1| \, .$$

Per i termini incrociati definiamo $\gamma = \langle E_1|E_0\rangle$. Ne segue:

$$\mathrm{Tr}_E(|0\rangle \langle 1| \otimes |E_0\rangle \langle E_1|) = \gamma \, |0\rangle \langle 1| \, ,$$
$$\mathrm{Tr}_E(|1\rangle \langle 0| \otimes |E_1\rangle \langle E_0|) = \gamma^* \, |1\rangle \langle 0| \, .$$

Lo stato ridotto: il risultato

Sommiamo i quattro contributi, con i loro coefficienti:

$$\rho_S = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + \alpha\beta^*\gamma |0\rangle \langle 1| + \alpha^*\beta\gamma^* |1\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| .$$

Nella base computazionale:

$$\boxed{\rho_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^*\gamma \\ \alpha^*\beta\gamma^* & |\beta|^2 \end{pmatrix}}.$$

Le popolazioni $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ restano invariate, mentre i termini fuori diagonale sono moltiplicati per il prodotto interno tra gli stati dell'ambiente:

$$\boxed{\rho_{01} = \alpha\beta^*\gamma}, \qquad \gamma = \langle E_1 | E_0 \rangle .$$

Il ruolo dell'overlap ambientale

Se

$$|E_0\rangle = |E_1\rangle\,, \qquad |\gamma| = 1,$$

l'ambiente non distingue le due componenti e la coerenza è preservata.

Se invece

$$\langle E_1|E_0\rangle = 0, \qquad \gamma = 0,$$

allora

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

La fase relativa non è più accessibile osservando soltanto il sistema.

Dephasing fenomenologico

Senza modellare l'ambiente, un semplice dephasing può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \lambda\alpha\beta^* \\ \lambda\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda \le 1.$$

$\lambda = 1$: coerenza preservata, $\lambda = 0$: coerenza soppressa nella base scelta.

Decoerenza e interferenza

Per

$$\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma^* & 1 \end{pmatrix},$$

la probabilità di ottenere $|+\rangle$ è

$$\boxed{p(+) = \langle + | \rho_S | + \rangle = \frac{1 + \mathrm{Re}\,\gamma}{2}.}$$

Quindi

$$\gamma = 1 \Rightarrow p(+) = 1, \qquad \gamma = 0 \Rightarrow p(+) = \frac{1}{2}.$$

La perdita dei termini fuori diagonale riduce la capacità di produrre interferenza.

Decoerenza e variazione di fase

Scriviamo il coefficiente di sovrapposizione ambientale come

$$\gamma = |\gamma| e^{i\varphi}.$$

Nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ le probabilità sono

$$\boxed{p(\pm) = \frac{1 \pm |\gamma| \cos\varphi}{2}}.$$

- $|\gamma|$ determina l'**attenuazione della coerenza**.
- φ ne modifica l'effetto sulle probabilità nella base scelta.

Esempio: se $\gamma = -1$, allora $|\gamma| = 1$ ma

$$p(+) = 0, \qquad p(-) = 1.$$

Lo stato rimane puro: cambia la fase relativa, *non* si perde coerenza.

Decoerenza e misura non sono la stessa cosa

La decoerenza descrive la perdita di coerenza del sottosistema quando ignoriamo l'ambiente.

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_E(\rho_{SE}).$$

La misura proiettiva contiene invece anche una regola condizionata all'esito:

$$\rho \longrightarrow \rho_m.$$

Per il calcolo quantistico la decoerenza è critica perché fasi relative, interferenza ed entanglement sono risorse operative.

Il prossimo passo è il modello circuitale.

Dal formalismo quantistico ai circuiti

Gli strumenti del capitolo preparano il **modello circuitale**:

- **Trasformazioni unitarie:** operazioni reversibili sui qubit.
- **Sistemi composti:** registri quantistici ed entanglement.
- **Misure quantistiche:** risultati classici dai registri.
- **Matrici densità e decoerenza:** stati misti e limiti fisici dei dispositivi.

Formalismo quantistico $\longrightarrow$ **Porte e circuiti quantistici**